

## Ejercicios de inducción y conjuntos acotados

jueves, 4 de noviembre de 2021

**Ejercicio.** Usando inducción matemática, pruebe que:

1)  $5 + 10 + 15 + \dots + 5n = \frac{5n(n+1)}{2}$  ;

2)  $7^n$  es un número impar p. c.  $n \in \mathbb{N}$ ;

3)  $n-2 < \frac{n^2-n}{12}$  p. c.  $n > 10$ .

**Sol. 1)** Caso base:  $n=1$

$$\frac{5(1)(1+1)}{2} = \frac{5(2)}{2} = 5 \quad \checkmark$$

**H.I.** : Supongamos que para alguna  $k \in \mathbb{N}$  se cumple que  
 $5 + 10 + 15 + \dots + 5k = \frac{5k(k+1)}{2}$

P.D.  $5 + 10 + 15 + \dots + 5k + 5(k+1) = \frac{5(k+1)[(k+1)+1]}{2}$

$$5 + 10 + 15 + \dots + 5k + 5(k+1)$$

$$= \frac{5k(k+1)}{2} + \frac{2}{2} 5(k+1) \quad \text{H.I.}$$

$$= \frac{5(k+1)}{2} [k+2]$$

$$= \frac{5(k+1)[(k+1)+1]}{2} \quad \checkmark$$

$\therefore$  La suma se cumple p. c.  $n \in \mathbb{N}$ .

2) Caso base:  $n=1$   $\checkmark$  ( $7$  es impar)

**H.I.** : Supongamos que  $7^k$  es impar para algún  $k \in \mathbb{N}$ ,  
es decir, existe  $m \in \mathbb{Z}$  t. q.  $7^k = 2m+1$

P.D.  $7^{k+1}$  es impar.

$$7^{k+1} = 7 \cdot 7^k$$

$$= 7(2m+1)$$

$$= 2(7m) + 7$$

$$= 2(7m) + 2 \cdot 3 + 1$$

$$= 2(7m+3) + 1 \quad , \quad \text{con } 7m+3 \in \mathbb{Z} \quad \checkmark$$

$\therefore 7^n$  es impar p.c.  $n \in \mathbb{N}$ .

3)  $n-2 < \frac{n^2-n}{12}$  p.c.  $n > 10$ .

Caso base:  $n = 11$

$$11-2 = 9 \quad \text{y} \quad \frac{11^2-11}{12} = \frac{121-11}{12} = \frac{110}{12} = \frac{55}{6} > \frac{54}{6} = 9$$

$$\Rightarrow 9 < \frac{11^2-11}{12} \quad \checkmark$$

H.I.: Supongamos que  $k-2 < \frac{k^2-k}{12}$  p.a.  $k > 10$

$$\text{P.D.} \quad (k+1)-2 < \frac{(k+1)^2-(k+1)}{12}$$

$$\frac{(k+1)^2-(k+1)}{12} = \frac{(k+1)[(k+1)-1]}{12}$$

$$= \frac{(k+1)k}{12}$$

$$= \frac{k^2+k}{12}$$

$\rightsquigarrow$  se parece al lado derecho de la H.I.

$$= \frac{k^2+k-2k+2k}{12}$$

$$= \frac{k^2-k}{12} + \frac{k}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{(k+1)^2-(k+1)}{12} = \frac{k^2-k}{12} + \frac{k}{6} \quad (*)$$

(Tal vez si sumamos  $\frac{k}{6}$  a la t.I. obtengamos el resultado)

$$\text{Por otro lado, } k > 10 \Rightarrow \frac{k}{6} > \frac{10}{6} > 1$$

$$\Rightarrow \frac{k}{6} > 1$$

$$\Rightarrow (k-2) + \frac{k}{6} > (k-2) + 1 = (k+1) - 2$$

$$\Rightarrow (k-2) + \frac{k}{6} > (k+1) - 2 \quad (\diamond)$$

De la t.I. sabemos que

$$k-2 < \frac{k^2 - k}{12}$$

$$\Rightarrow (k+1) - 2 < (k-2) + \frac{k}{6} < \frac{k^2 - k}{12} + \frac{k}{6} \stackrel{(\star)}{=} \frac{(k+1)^2 - (k+1)}{12}$$

$$\Rightarrow (k+1) - 2 < \frac{(k+1)^2 - (k+1)}{12} \quad \checkmark$$

$\therefore$  La desigualdad se cumple p.c.  $n > 10$   $\square$

**Ejercicio.** Determine si las siguientes conjuntos están acotados superior o inferiormente y si poseen elemento máximo o mínimo, supremo o ínfimo en  $\mathbb{R}$ :

1)  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |9x+7| > 4\};$

2)  $B = \{(-1)^n \cdot 2^n \mid n \in \mathbb{N}\};$

3)  $C = [\sqrt{2}, 6) \cap \mathbb{Q}.$

**Sol.** 1)  $x \in A \Leftrightarrow |9x+7| > 4$

$$\Leftrightarrow 9x+7 > 4 \quad \text{o} \quad 9x+7 < -4$$

$$\Leftrightarrow x > -\frac{1}{3} \quad \text{o} \quad x < -\frac{11}{9}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\frac{4}{3}, \infty\right) \quad \text{o} \quad x \in \left(-\infty, -\frac{11}{9}\right)$$

$$\Rightarrow A = (-\infty, -\frac{1}{9}) \cup (-\frac{1}{3}, \infty)$$

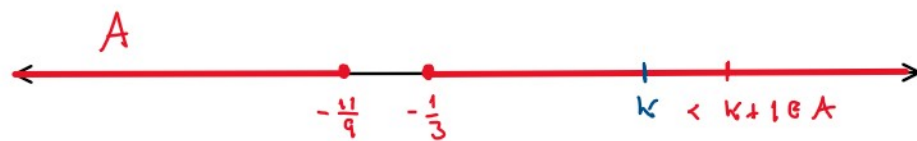
• **Afirmación:** A no está acotado superiormente.

$$(P.D. \forall k > 0 \exists a \in A (k < a))$$

Sea  $k > 0$ . Notemos que  $k+1 > 0 > -\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow k+1 \in A \quad \gamma \quad k < k+1$$

$\therefore$  A no está acotado superiormente



• De manera similar se prueba que A no está acotado inferiormente.

$\Rightarrow$  A no tiene supremo, ínfimo, máximo ni mínimo.

$$2) B = \{(-1)^n \cdot 2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$(-1)^1 \cdot 2^1 = (-1) \cdot 2 = -2$$

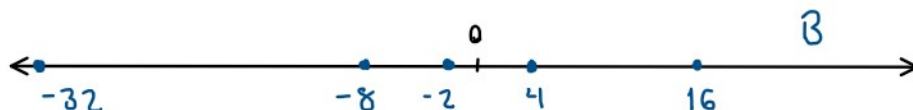
$$(-1)^2 \cdot 2^2 = 1 \cdot 4 = 4$$

$$(-1)^3 \cdot 2^3 = (-1) \cdot 8 = -8$$

$$(-1)^4 \cdot 2^4 = 1 \cdot 16 = 16$$

$$(-1)^5 \cdot 2^5 = (-1) \cdot 32 = -32$$

...



• **Afirmación:** B no está acotado inferiormente.

$$\text{Sea } k < 0 \Rightarrow -k > 0$$

$$\Rightarrow \text{existe } n \in \mathbb{N} \text{ impar t.q. } n > -k \quad (p.A.)$$

(si n es par, consideramos n+1 impar)

$$\Rightarrow 2^n \geq n > -k$$

$$\Rightarrow 2^n > -k$$

$$\Rightarrow -2^n < -(-k) = k$$

$$\Rightarrow (-1)^n \cdot 2^n < k, \quad (-1)^n \cdot 2^n \in B$$

$\therefore B$  no está acotado inferiormente

- Análogamente se prueba que  $B$  no está acotado superiormente

$\Rightarrow B$  no tiene máximo, mínimo, supremo ni ínfimo.

$$3) C = [\sqrt{2}, 6) \cap \mathbb{Q}$$



- Sea  $c \in C \Rightarrow c \in [\sqrt{2}, 6)$   
 $\Rightarrow \sqrt{2} < c < 6$  p.c.  $c \in C$

Esto es,  $C$  está acotado superiormente por 6 e inferiormente por  $\sqrt{2}$

Ya que  $2 \in C \neq \emptyset$ ,  $C$  tiene supremo e ínfimo.

- Notamos que 6 es cota superior de  $C$

$$P.D. \sup C = 6$$

$$(P.D. \forall \varepsilon > 0 \exists a \in C (6 - \varepsilon < a))$$

Sea  $\varepsilon > 0$ . Por densidad de los racionales,

existe  $q \in \mathbb{Q}$  tal que

$$\max\{\sqrt{2}, 6 - \varepsilon\} < q < 6$$

$$- \max\{\sqrt{2}, 6 - \varepsilon\} > \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} < q < 6 \text{ y } q \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow q \in C$$

$$\sim \max\{\sqrt{2}, G - \varepsilon\} \geq G - \varepsilon \Rightarrow G - \varepsilon < q$$

$$\Rightarrow q \in C \text{ y } G - \varepsilon < q$$

$$\therefore \sup C = G$$

- Similantemente se prueba que  $\inf C = \sqrt{2}$ .
- **Afirmación:**  $C$  no tiene elemento mínimo

$$\text{Sea } c \in C \Rightarrow c \in \mathbb{Q} \text{ y } \sqrt{2} < c < G$$

$$\Rightarrow \text{existe } p \in \mathbb{Q} \text{ t. q. } \sqrt{2} < p < c \quad (\text{densidad } \mathbb{Q})$$

$$\Rightarrow p \in \mathbb{Q} \text{ y } \sqrt{2} < p < G$$

$$\Rightarrow p \in C \text{ y } p < c$$

Esto es, ningún elemento de  $C$  es cota inferior de  $C$ .

- Análogamente se prueba que  $C$  no tiene máximo.

**Ejercicio.** Sea  $A \subset \mathbb{R}$  no vacío. Pruebe que si  $A$  está acotado inferiormente y tiene elemento mínimo, entonces

$$\inf A = \min A$$

**Dem.** Dado que  $A \neq \emptyset$  y está acotado inferiormente, se sigue que  $A$  tiene ínfimo.

$$\text{P.D. } \inf A = \min A.$$

$$\text{Sea } \varepsilon > 0 \Rightarrow \min A + \varepsilon > \min A + 0$$

$$\Rightarrow \min A + \varepsilon > \min A, \text{ con } \min A \in A$$

$$\therefore \min A = \inf A \quad \square$$

## Guía 2 Ejercicio 1 (b)

$$H.I. : 1^2 - 2^2 + 3^2 + \dots + (-1)^{n+1} \cdot n^2 = \frac{(-1)^{n+1} \cdot n(n+1)}{2}$$

Paso inductivo:

$$\begin{aligned} & 1^2 - 2^2 + 3^2 + \dots + (-1)^{n+1} \cdot n^2 + (-1)^{(n+1)+1} \cdot (n+1)^2 \\ &= \frac{(-1)^{n+1} \cdot n(n+1)}{2} + \frac{(-1)^{(n+1)+1} \cdot 2(n+1)^2}{2} \\ &= \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n+1)}{2} [n + (-1) \cdot 2(n+1)] \\ &= \dots \end{aligned}$$

## Guía 2 Ejercicio 2 (b)

$$\begin{aligned} 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 2^2 + \dots + (2n-1)^2 + (2n)^2 \\ &\quad - [2^2 + 4^2 + \dots + (2n)^2] \end{aligned}$$