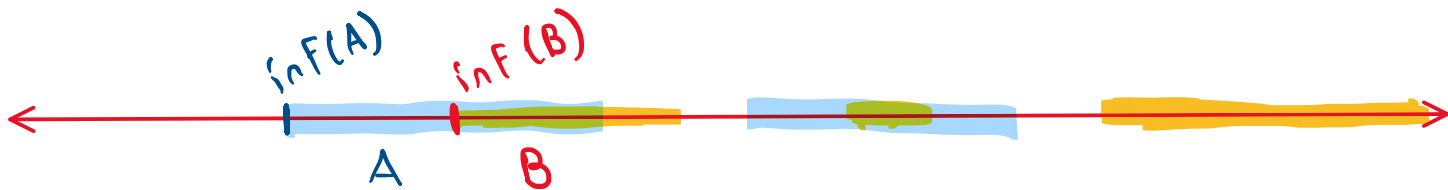


Demstrar que si A y B son subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ acotados inferiormente, entonces

$$\inf(A \cup B) = \min \{ \inf(A), \inf(B) \}$$



Sea $\alpha = \min \{ \inf(A), \inf(B) \}$.

P.D. $\inf(A \cup B) = \alpha$

P.D. i) $\forall x \in A \cup B \quad \alpha \leq x$

ii) Si $\beta \in \mathbb{R}$ es cota inferior de $A \cup B$, entonces $\beta \leq \alpha$

i) Sea $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ o $x \in B$

• Si $x \in A \Rightarrow \alpha \leq \inf(A) \leq x$ ($\inf(A)$ es cota inferior de A y $x \in A$)
 $\Rightarrow \alpha \leq x$

• Si $x \in B \Rightarrow \alpha \leq \inf(B) \leq x$ ($\inf(B)$ es cota inferior de B y $x \in B$)
 $\Rightarrow \alpha \leq x$

$$\therefore \forall x \in A \cup B \quad \alpha \leq x$$

ii) Sea $\beta \in \mathbb{R}$ una cota inferior de $A \cup B$ (P.D. $\beta \leq \alpha$)

$$\Rightarrow \forall x \in A \cup B \quad \beta \leq x$$

En particular,

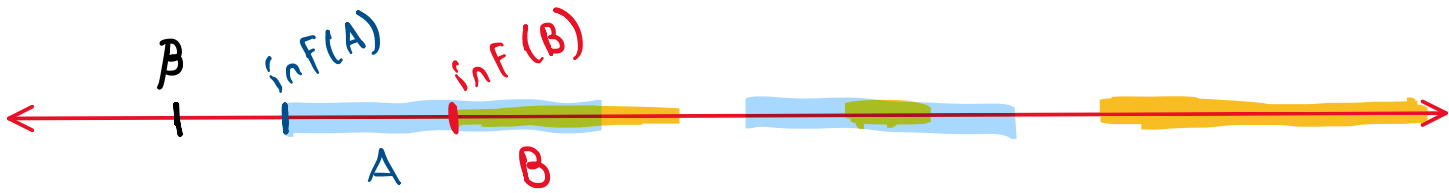
$$\forall x \in A \quad \beta \leq x \Rightarrow \beta \text{ es cota inferior de } A \Rightarrow \beta \leq \inf(A)$$

$$\forall x \in B \quad \beta \leq x \Rightarrow \beta \text{ es cota inferior de } B \Rightarrow \beta \leq \inf(B)$$

$$\text{Como } \beta \leq \inf(A) \text{ y } \beta \leq \inf(B) \Rightarrow \beta \leq \min \{ \inf(A), \inf(B) \} \\ \Rightarrow \beta \leq \alpha$$

$$\therefore \inf(A \cup B) = \alpha$$

$$\therefore \inf(A \cup B) = \min \{ \inf(A), \inf(B) \}$$



Recordemos que

$$A+B = \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$$

Demstrar que si A y B son subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ acotados inferiormente, entonces

$$\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$$

Sea $\alpha = \inf(A) + \inf(B)$

P.D. $\inf(A+B) = \alpha$

P.D. i) $\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad \alpha \leq a+b$ (α es cota inferior de $A+B$)

ii) Si $\beta \in \mathbb{R}$ es una cota inferior de $A+B$, entonces $\beta \leq \alpha$

i) Sean $a \in A$ y $b \in B$.

Como $\inf(A)$ es cota inferior de $A \Rightarrow \inf(A) \leq a$

$\inf(B)$ es cota inferior de $B \Rightarrow \inf(B) \leq b$

$\Rightarrow \inf(A) + \inf(B) \leq a+b$

$\Rightarrow \alpha \leq a+b$

Otra manera {

$$\begin{aligned} &\text{Como } \inf(A) \text{ es cota inferior de } A \Rightarrow \forall a \in A \quad \inf(A) \leq a \\ &\quad \inf(B) \text{ es cota inferior de } B \Rightarrow \forall b \in B \quad \inf(B) \leq b \\ &\Rightarrow \forall a \in A \quad \forall b \in B \quad \inf(A) + \inf(B) \leq a+b \\ &\Rightarrow \forall a \in A \quad \forall b \in B \quad \alpha \leq a+b \end{aligned}$$

ii) Sea $\beta \in \mathbb{R}$ una cota inferior de $A+B$. (P.D. $\beta \leq \alpha$)
P.D. $\beta \leq \inf(A) + \inf(B)$

$\Rightarrow \forall a \in A \quad \forall b \in B \quad \beta \leq a+b$

Sea $b \in B$ (cualquiera, pero fijo)

$$\Rightarrow \forall a \in A \quad \beta \leq a + b$$

$$\Rightarrow \forall a \in A \quad \beta - b \leq a \Rightarrow \beta - b \text{ es cota inferior de } A$$

$$\Rightarrow \beta - b \leq \inf(A) \text{ para cada } b \in B$$

$$\Rightarrow \forall b \in B \quad \beta - b \leq \inf(A)$$

$$\Rightarrow \forall b \in B \quad \beta - \inf(A) \leq b \Rightarrow \beta - \inf(A) \text{ es cota inferior de } B$$

$$\Rightarrow \beta - \inf(A) \leq \inf(B)$$

$$\Rightarrow \beta \leq \inf(A) + \inf(B)$$

$$\Rightarrow \beta \leq \alpha$$

$$\therefore \inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$$

$$\forall a \in A \quad x \leq a \Rightarrow x \text{ es cota inferior de } A \\ \Rightarrow x \leq \inf(A)$$

$$\forall a \in A \quad a \leq x \Rightarrow x \text{ es cota superior de } A \\ \Rightarrow \sup(A) \leq x$$

(*) Teorema. Sea α una cota inferior de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$.

Son equivalentes:

1) $\alpha = \inf A$, es decir, si $\beta \in \mathbb{R}$ es una cota inferior de A , entonces $\beta \leq \alpha$

2) Para todo $z \in \mathbb{R}$: si $z > \alpha$, entonces existe $a \in A$ tal que $a < z$

3) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \quad a < \alpha + \varepsilon$.

$$\frac{\varepsilon}{2} > 0$$

$$a < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$$

* Otra manera de demostrar que $\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$:

$$\text{Sea } \alpha = \inf(A) + \inf(B)$$

$$\text{P.D. } \inf(A+B) = \alpha$$

$$\text{P.D. i) } \forall a \in A \quad \forall b \in B \quad \alpha \leq a + b \quad (\alpha \text{ es cota inferior de } A+B) \quad \checkmark$$

$$(ii) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A+B \quad x < \alpha + \varepsilon$$

$$\text{P.D. } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \quad \exists b \in B \quad a+b < \alpha + \varepsilon$$

$$a+b < \inf(A) + \inf(B) + \varepsilon$$

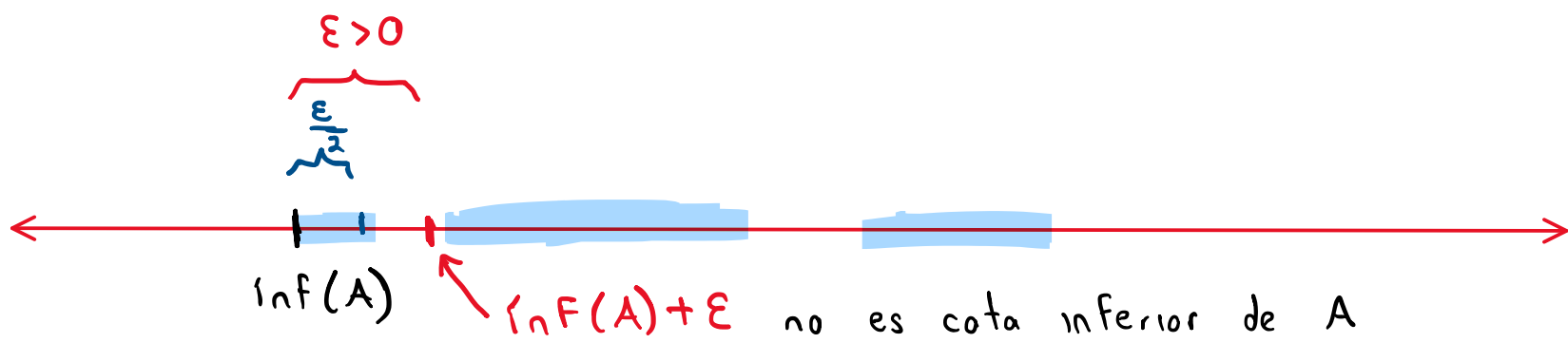
(ii) Sea $\varepsilon > 0 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{2} > 0$. Por 3) del Teorema (*) aplicado a $\frac{\varepsilon}{2}$:

• existe $a \in A$ tal que $a < \inf(A) + \frac{\varepsilon}{2}$

• existe $b \in B$ tal que $b < \inf(B) + \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow \exists a \in A \quad \exists b \in B \quad a+b < \inf(A) + \inf(B) + \underbrace{\varepsilon}_{\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}}$$

$$\therefore \inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$$



$$\exists x \quad \forall y \neq \forall y \quad \exists x$$

- Para todo $x \in \{\text{personas}\}$ existe $p \in \{\text{países}\}$ tal que x nació en p
 p depende de x

- Existe $p \in \{\text{países}\}$ tal que para todo $x \in \{\text{personas}\}$, x nació en p .
(existe un país p donde nacieron todas las personas)

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x+y=0 \quad (\text{V})$$

(y depende de x)

$$\exists y \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x+y=0 \quad (\text{F})$$

y no depende de x

$$\begin{array}{l}
 * \exists \underline{0 \in \mathbb{R}} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x + 0 = x \\
 \exists 1 \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x \cdot 1 = x
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \exists 0 \in \mathbb{R} \\ \exists 1 \in \mathbb{R} \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Los neutros} \\ \text{no dependen} \\ \text{de } x \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists -x \in \mathbb{R} \quad x + (-x) = 0 \\
 \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \exists x^{-1} \in \mathbb{R} \quad x \cdot x^{-1} = 1
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \exists -x \in \mathbb{R} \\ \exists x^{-1} \in \mathbb{R} \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Los inversos} \\ \text{dependen de} \\ \text{cada } x \end{array}$$

• ¿ $\mathbb{N}$ está acotado inferiormente? Sí, 0 es una cota inferior porque $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq n$

• ¿ $\mathbb{N}$ está acotado superiormente?

• $\mathbb{N}$ está acotado superiormente si $\exists z \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \leq z$

* $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente si $\forall z \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad n > z$

Teorema (Propiedad Arquimediana)

$\mathbb{N}$ no está acotado superiormente, es decir, para todo $z \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > z$.

Demostración.

Supongamos que $\mathbb{N}$ está acotado superiormente. Como $1 \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N} \neq \emptyset$.

Por el axioma del supremo, sea $\alpha = \sup \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \leq \alpha$

Como $\alpha - 1 < \alpha$ y α es la mínima cota superior de $\mathbb{N} \Rightarrow \alpha - 1$ no es cota superior de $\mathbb{N} \Rightarrow$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha - 1 < m$

$$\Rightarrow \alpha < m + 1, \quad \text{con } m + 1 \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow \alpha$ no es cota superior de $\mathbb{N}$!

$\therefore \mathbb{N}$ no está acotado superiormente.

$$\begin{array}{c}
 \alpha - 1 \quad \text{no es cota sup.} \\
 \dots \dots \dots \quad | \quad m \quad | \\
 \qquad \qquad \qquad \alpha = \sup \mathbb{N}
 \end{array}$$