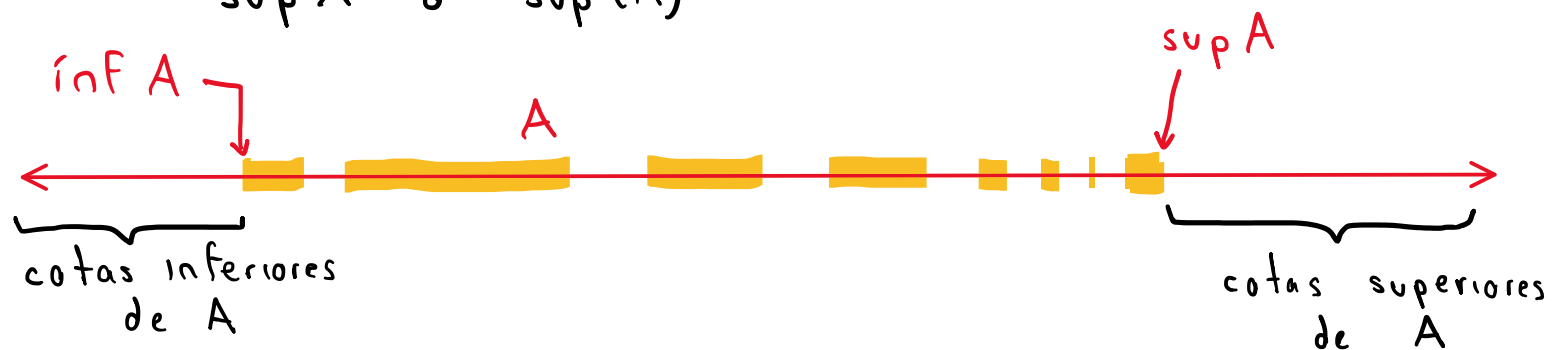


Definición. Sean $A \subset \mathbb{R}$ acotado superiormente y $\alpha \in \mathbb{R}$.

α es el supremo de A si es la mínima cota superior de A , es decir:

- i) α es cota superior de A
- ii) si $\beta \in \mathbb{R}$ es una cota superior de A , entonces $\alpha \leq \beta$.

* Notación: $\sup A$ o $\sup(A)$



Definición. Sean $A \subset \mathbb{R}$ acotado inferiormente y $\alpha \in \mathbb{R}$.

α es el ínfimo de A si es la máxima cota inferior de A , es decir:

- i) α es cota inferior de A
- ii) si $\beta \in \mathbb{R}$ es una cota inferior de A , entonces $\beta \leq \alpha$.

* Notación: $\inf A$ o $\inf(A)$

Teorema. Sea α una cota superior de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$.

Son equivalentes:

- 1) $\alpha = \sup A$, es decir, si $\beta \in \mathbb{R}$ es cota superior de A , entonces $\alpha \leq \beta$
- 2) Para todo $z \in \mathbb{R}$: si $z < \alpha$, entonces existe $a \in A$ tal que $z < a$
- 3) $\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A \alpha - \varepsilon < a$.



Teorema. Sea α una cota inferior de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$.

Son equivalentes:

- 1) $\alpha = \inf A$, es decir, si $\beta \in \mathbb{R}$ es una cota inferior de A , entonces $\beta \leq \alpha$
- 2) Para todo $z \in \mathbb{R}$: si $z > \alpha$, entonces existe $a \in A$ tal que $a < z$
- 3) $\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A \quad a < \alpha + \varepsilon$.

Demostración. (Ejercicio)

Axioma del supremo

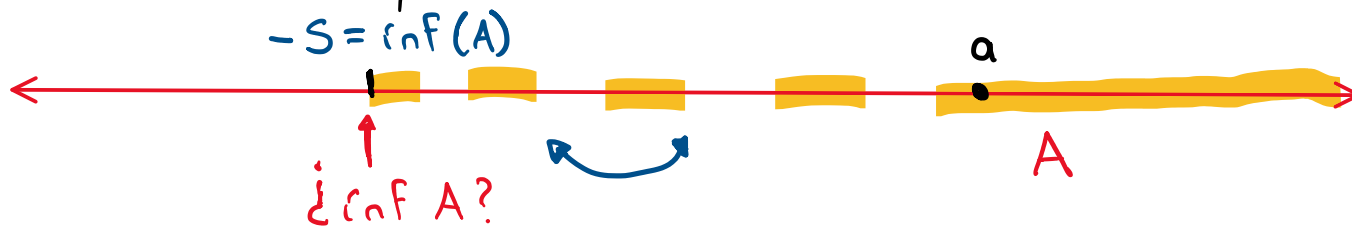
Todo conjunto $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente tiene supremo.

"Teorema de ínfimo"

Todo conjunto $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente tiene ínfimo.

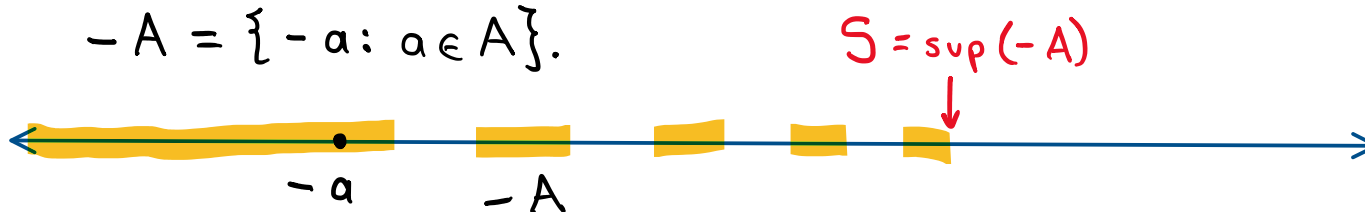
Demostración.

Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente.



Definimos

$$-A = \{-a : a \in A\}.$$



Veamos que $-A$ es no vacío y está acotado superiormente.

- Como $A \neq \emptyset$, existe $a \in A \Rightarrow -a \in -A \Rightarrow -A \neq \emptyset$
- Como A está acotado inferiormente, existe $z \in \mathbb{R}$ tal que

$$\forall a \in A \quad z \leq a$$

$$\Rightarrow \forall a \in A \quad -a \leq -z$$

$\Rightarrow -z$ es una cota superior de $-A$

$\therefore -A$ está acotado superiormente

Por el axioma del supremo, el conjunto $-A$ tiene supremo.

Sea $S = \sup(-A)$. P.D. $-S = \inf(A)$

i) P.D. $-S$ es cota inferior de A

Dado que S es cota superior de $-A$, tenemos que

$$\forall a \in A \quad -a \leq S$$

$$\Rightarrow \forall a \in A \quad -S \leq a$$

$$\Rightarrow -S \text{ es cota inferior de } A.$$

ii) P.D. $-S$ es la máxima cota inferior de A , es decir,

si $\beta \in \mathbb{R}$ es cota inferior de A , entonces $\beta \leq -S$.

Sea $\beta \in \mathbb{R}$ una cota inferior de A

$$\Rightarrow \forall a \in A \quad \beta \leq a$$

$$\Rightarrow \forall a \in A \quad -a \leq -\beta$$

$$\Rightarrow -\beta \text{ es cota superior de } -A \Rightarrow S \leq -\beta \Rightarrow \beta \leq -S.$$

$S = \sup(-A)$

$$\therefore -S = \inf(A)$$

$$\therefore A \text{ tiene ínfimo}$$

Definición. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$ y $t \in \mathbb{R}$. Definimos

$$-A = \{-a \mid a \in A\}$$

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

$$tA = \{ta \mid a \in A\}$$

$$A + t = \{a + t \mid a \in A\} \quad (\text{traslación})$$

Por ejemplo, si $A = (-2, 3]$ y $B = (0, 10)$, entonces

$$A + 6 = \{a + 6 \mid -2 < a \leq 3\} = \{a + 6 \mid 4 < a + 6 \leq 9\}$$

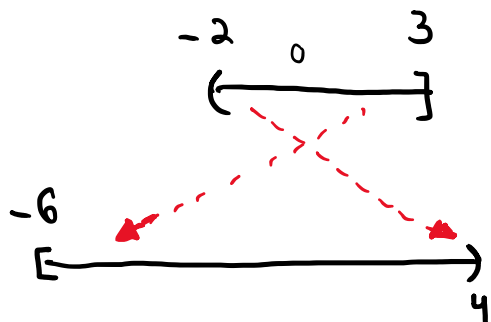
$$\Rightarrow A + 6 = (4, 9]$$

$$5B = \{5b \mid b \in B\} = \{5b \mid 0 < b < 10\} = \{5b \mid 0 < 5b < 50\}$$

$$\Rightarrow 5B = (0, 50)$$

$$-2A = \{-2a \mid a \in (-2, 3]\} = \{-2a \mid -2 < a \leq 3\} = \{-2a \mid -6 \leq -2a < 4\}$$

$$\Rightarrow -2A = [-6, 4)$$



$$C = [-1, 2]$$

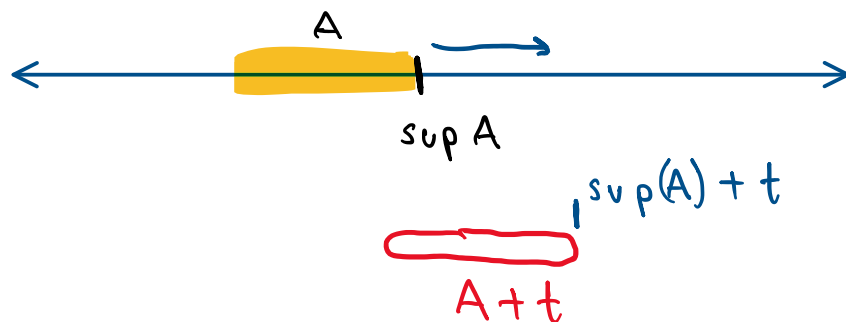
$$D = [-2, 5)$$

$$\Rightarrow C + D = \{c + d \mid -1 \leq c \leq 2, -2 \leq d < 5\}$$

$$= \{c + d \mid -3 \leq c + d < 7\}$$

$$C + D = [-3, 7)$$

Ejercicios. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ acotados y no vacíos. Si $t \in \mathbb{R}$, demostrar que:



$$1) \sup(t + A) = t + \sup A$$

* Sabemos que $\sup A$ existe porque $A \neq \emptyset$ y A está acotado superiormente.

Recordemos que

$$t + A = \{t + a \mid a \in A\}$$

Queremos verificar que el número $t + \sup A$ es el supremo del conjunto $t + A$.

P.D. i) $t + \sup A$ es cota superior de $t + A$

ii) Si $\beta \in \mathbb{R}$ es cota superior de $t + A$, entonces $t + \sup A \leq \beta$

Sea $S = \sup A$

i) Como S es cota superior de $A \Rightarrow \forall a \in A \quad a \leq S$

$$\Rightarrow \forall a \in A \quad t + a \leq t + S$$

$\Rightarrow t + S$ es cota superior de $t + A$

ii) Sea $\beta \in \mathbb{R}$ una cota superior de $t+A$. P.D. $t+S \leq \beta$
 $\Rightarrow \forall a \in A \quad t+a \leq \beta$ (def. de cota sup.)
 $\Rightarrow \forall a \in A \quad a \leq \beta - t$ ("despejo a ")
 $\Rightarrow \beta - t$ es cota superior de $A \Rightarrow S \leq \beta - t \Rightarrow t+S \leq \beta$
 $\uparrow$
 $S = \sup A$ (mínima cota superior de A)

$$\Rightarrow \forall a \in A \quad t+a \leq \beta \quad (\text{def. de cota sup.})$$

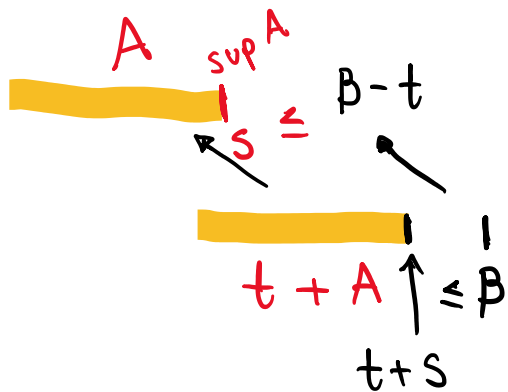
$$\Rightarrow \forall a \in A \quad a \leq \beta - t \quad (\text{"despejo } a")$$

$$\Rightarrow \beta - t \text{ es cota superior de } A \Rightarrow S \leq \beta - t \Rightarrow t + S \leq \beta$$

$$S = \sup A \text{ (mínima cota superior de } A)$$

$$\therefore t + S = \sup(t + A)$$

$$t + \sup A = \sup (t + A)$$



2) $\ln(t+A) = t + \ln(A)$ (Ejercicio)

3) Si $t > 0$, entonces $\left. \begin{aligned} \sup(tA) &= t \sup(A) \\ \inf(tA) &= t \inf(A) \end{aligned} \right\} \text{ (Ejercicio)}$

4) Si $t < 0$, entonces $\bullet \sup(tA) = t \inf(A)$
 $\inf(tA) = t \sup(A)$ (ejercicio)

- P.D. $\sup(tA) = t \cap F(A)$

Sea $\alpha = \inf(A)$. P.D. $\sup(tA) = t\alpha$

P.D. i) t_α es cota superior de t_A

ii) Si $\beta \in \mathbb{R}$ es cota superior de tA , entonces $t\alpha \leq \beta$

i) Como α es cota inferior de $A \Rightarrow \forall a \in A \quad \alpha \leq a$

$$\Rightarrow \forall a \in A \quad t_\alpha \geq t_a \quad (t < 0)$$

$\Rightarrow t_\alpha$ es cota superior de t_A .

ii) Sea $\beta \in \mathbb{R}$ una cota superior de tA . P.D. $t\alpha \leq \beta$

$$\Rightarrow \forall a \in A \quad ta \leq \beta \quad (\text{aplico def.})$$

$$\Rightarrow \forall a \in A \quad a \geq \frac{\beta}{t} \quad (t < 0) \quad (\text{"despejar } a")$$

$$\Rightarrow \frac{\beta}{t} \text{ es cota inferior de } A \Rightarrow \frac{\beta}{t} \leq \alpha \Rightarrow \beta \geq \alpha t \quad (t < 0)$$

$$\alpha = \inf(A)$$

$$\therefore t\alpha = \sup(tA),$$

$$\therefore t \inf(A) = \sup(tA)$$

$$\left. \begin{array}{l} 5) \sup(-A) = -\inf(A) \\ \inf(-A) = -\sup(A) \end{array} \right\} (\text{Ejercicio})$$