

Ejemplo:

$$\text{Sea } A = [-3, 0) \cup [2, 8) \quad \begin{array}{l} \forall a \in A \\ a \leq 8 \end{array}$$

$$\Rightarrow \bullet \min A = -3$$

- $\max A$ no existe
- A está acotado (inferior y superiormente)
- Conjunto de cotas inferiores: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3\} = (-\infty, -3]$
- Conjunto de cotas superiores: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 8\} = [8, \infty)$

$$B = (8, \infty)$$

$$\text{Conjunto de cotas inferiores: } \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 8\} = (-\infty, 8]$$

$$\text{Conjunto de cotas superiores: } \emptyset$$

$$C = [8, 8] = \{8\} \quad [8, 8] = \{x \in \mathbb{R} \mid 8 \leq x \leq 8\}$$

$$\text{Conjunto de cotas inferiores: } \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 8\} = (-\infty, 8]$$

$$\text{Conjunto de cotas superiores: } \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 8\} = [8, \infty)$$

$$(8, 8) = \{x \in \mathbb{R} \mid 8 < x < 8\} = \emptyset$$

$$D = \emptyset$$

$$\text{Conjunto de cotas inferiores: } \text{¿?}$$

$$\text{Conjunto de cotas superiores:}$$

$$z \text{ es cota inferior de } A \text{ si } \forall a \in A \quad z \leq a$$

$$z \text{ no es cota inferior de } A \text{ si } \exists a \in A \quad a < z$$

Sea $z \in \mathbb{R}$

— z no es cota inferior de $\emptyset$ si $\underbrace{\exists a \in \emptyset \quad a < z}_{\text{es falso porque } \nexists a \in \emptyset}$ (F)

■ z es cota inferior de $\emptyset$ si $\underline{\forall a \in \emptyset \quad z \leq a}$ (V)

Como $\emptyset$ no tiene elementos,
no hay nada que verificar
"Se cumple por vacuidad"

• Todos los hombres que tienen 5 ojos estudian 5 carreras. (V)

Si un hombre H tiene 5 ojos $\Rightarrow H$ estudia 5 carreras
Falso

• Todo elemento del conjunto vacío es mayor o igual a z . (V)

$$\underbrace{a \in \emptyset}_{F} \Rightarrow z \leq a$$

* Cualquier número real es cota superior y cota inferior del conjunto vacío $\emptyset$.

$$\text{Si } D = \emptyset$$

Conjunto de cotas inferiores: $\mathbb{R}$

Conjunto de cotas superiores: $\mathbb{R}$

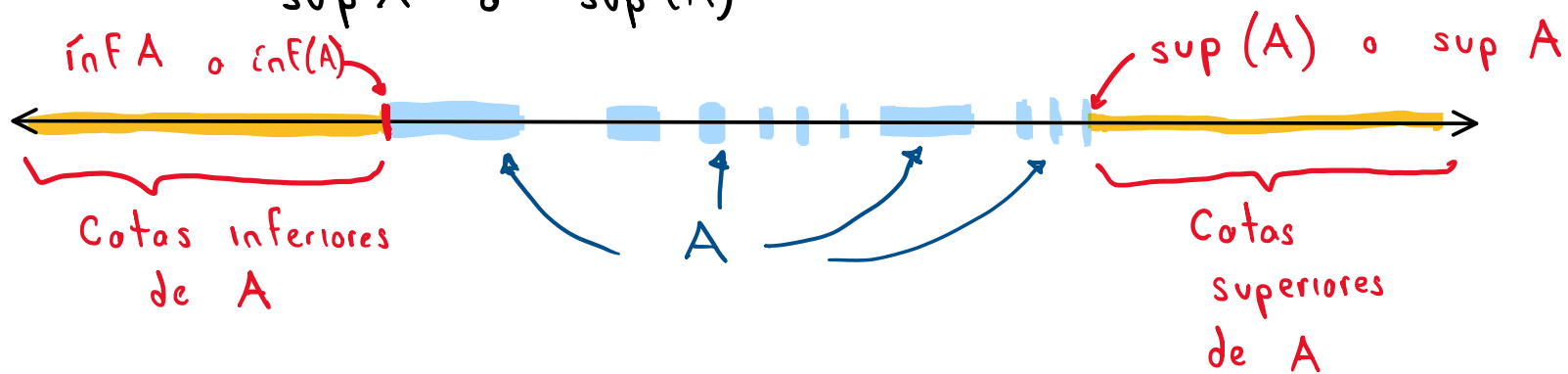
Definición. Sean $A \subset \mathbb{R}$ acotado superiormente y $\alpha \in \mathbb{R}$.

α es el supremo de A si es la mínima cota superior de A , es decir:

i) α es cota superior de A

ii) si $\beta \in \mathbb{R}$ es una cota superior de A , entonces $\alpha \leq \beta$.

* Notación: $\sup A$ o $\sup(A)$



Definición. Sean $A \subset \mathbb{R}$ acotado inferiormente y $\alpha \in \mathbb{R}$.

α es el ínfimo de A si es la máxima cota inferior de A , es decir:

i) α es cota inferior de A

ii) si $\beta \in \mathbb{R}$ es una cota inferior de A , entonces $\beta \leq \alpha$.

* Notación: $\inf A$ o $\inf(A)$

Ejemplos:

① Si $A = (-4, -1)$

Cotas superiores de $A = [-1, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$

$\Rightarrow \sup A = -1$ (es el mínimo del conjunto de cotas superiores)

Cotas inferiores de $A = (-\infty, -4]$

$\Rightarrow \inf A = -4$

② Si $A = [-4, -1]$

Cotas superiores de $A = [-1, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$

$\Rightarrow \sup A = -1$ (es el mínimo del conjunto de cotas superiores)

Cotas inferiores de $A = (-\infty, -4]$

$\Rightarrow \inf A = -4$

③ Si $A = \{-1\}$

Cotas superiores de $A = [-1, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$

$\Rightarrow \sup A = -1$ (es el mínimo del conjunto de cotas superiores)

Cotas inferiores de $A = (-\infty, -1] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$

$\Rightarrow \inf A = -1$

④ Si A no está acotado superiormente, entonces A no tiene supremo.

⑤ $\emptyset$ sí está acotado superiormente, pero no tiene supremo
(ni ínfimo)

Conjunto de cotas superiores: $\mathbb{R}$

Como $\mathbb{R}$ no tiene elemento mínimo, entonces $\emptyset$ no tiene supremo
(no hay una mínima cota superior)

⑥ $A \neq \emptyset$

A acotado superiormente

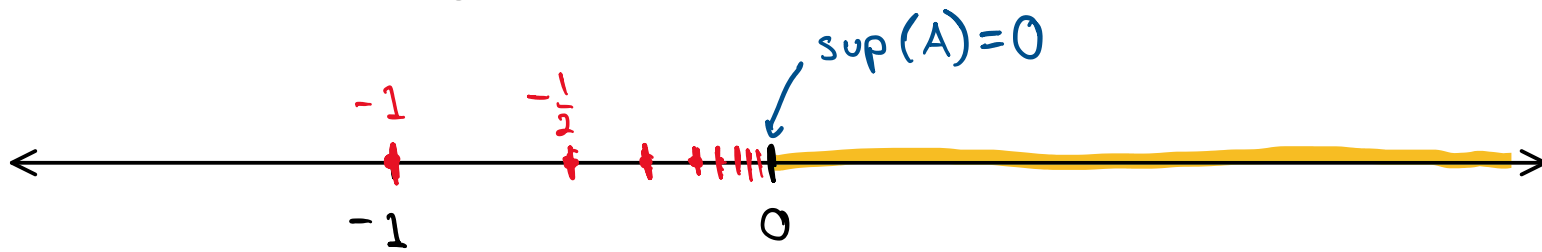
A no tiene supremo

¿Existe $A \subseteq \mathbb{R}$ con estas propiedades?

cota superior de A



$$A = \left\{ -\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$



* Axioma del supremo *

Todo conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente tiene supremo.

Tenemos:

• 9 axiomas de campo $\left\{ \begin{array}{l} 4 \text{ para } + \text{ (asoc., conmut., neutro (0) e inversos)} \\ 4 \text{ para } \cdot \text{ (asoc., conmut., neutro (1) e inverso)} \\ \text{Distributividad (relaciona } + \text{ y } \cdot) \end{array} \right.$

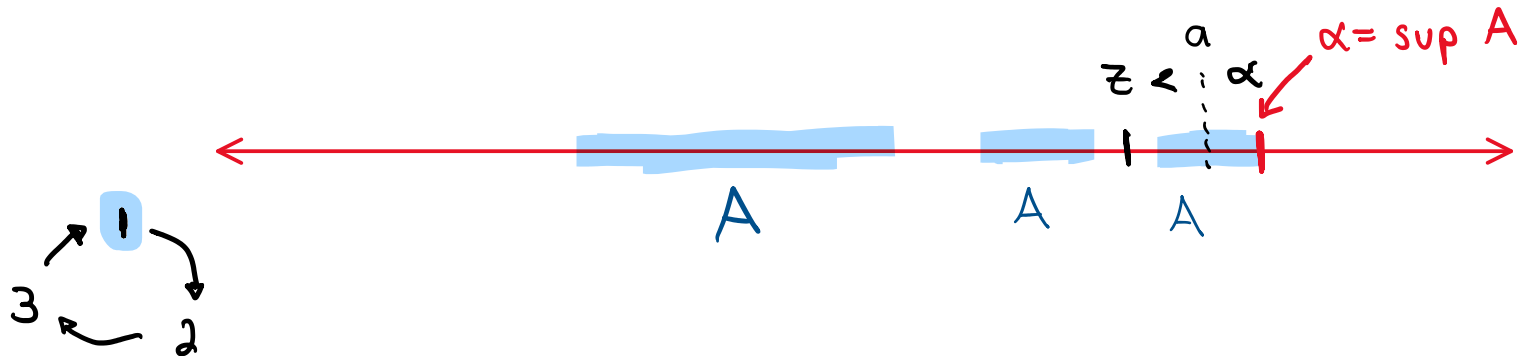
• 3 axiomas de orden $\left\{ \begin{array}{l} + \text{ es cerrada en } P \\ \cdot \text{ es cerrado en } P \\ \text{Tricotomía} \end{array} \right.$

• Axioma del supremo

Teorema. Sea α una cota superior de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$.

Son equivalentes:

- 1) $\alpha = \sup A$, es decir, si $\beta \in \mathbb{R}$ es cota superior de A , entonces $\alpha \leq \beta$
- 2) Para todo $z \in \mathbb{R}$: si $z < \alpha$, entonces existe $a \in A$ tal que $z < a$
- 3) $\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A$ $\alpha - \varepsilon < a$.



Demostración: (Demostraremos que $1 \Rightarrow 2$, $2 \Rightarrow 3$ y $3 \Rightarrow 1$)

$1) \Rightarrow 2)$ Supongamos que $\alpha = \sup A$. (α es la mínima cota superior de A)

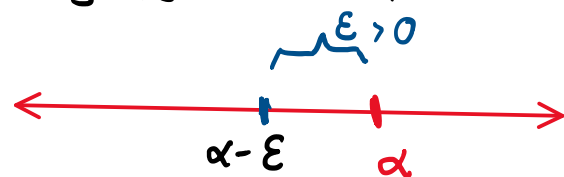
Sea $z \in \mathbb{R}$ tal que $z < \alpha$. P.D. existe $a \in A$ tal que $z < a$.

Como $z < \alpha \Rightarrow z$ no es cota superior de A ($\neg \forall a \in A \ a \leq z$)

$\Rightarrow \exists a \in A \ a > z$.

$2) \Rightarrow 3)$ Sup. que para todo $z \in \mathbb{R}$: si $z < \alpha \Rightarrow \exists a \in A \ z < a$.

Sea $\varepsilon > 0$. P.D. $\exists a \in A \ \alpha - \varepsilon < a$.



Como $\varepsilon > 0 \Rightarrow -\varepsilon < 0 \Rightarrow \alpha - \varepsilon < \alpha$.

Debido a 2) (tomando $z = \alpha - \varepsilon$), existe $a \in A$ tal que $\alpha - \varepsilon < a$.

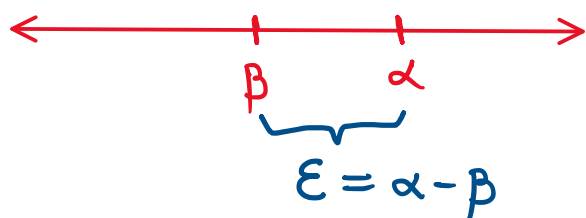
$3) \Rightarrow 1)$ Supongamos ahora que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A \ \alpha - \varepsilon < a$.

P.D. $\alpha = \sup A$

P.D. Si $\beta \in \mathbb{R}$ es cota superior de A , entonces $\alpha \leq \beta$

(Reducción al absurdo)

Sea β una cota superior de A . Supongamos que $\alpha \neq \beta$



$\Rightarrow \beta < \alpha$

$\Rightarrow 0 < \alpha - \beta$.

Sea $\varepsilon = \alpha - \beta \Rightarrow \varepsilon > 0$

Debido a 3), existe $a \in A$ t.q. $\alpha - \varepsilon < a$

$$\Rightarrow \exists a \in A \quad \alpha - (\alpha - \beta) < a$$

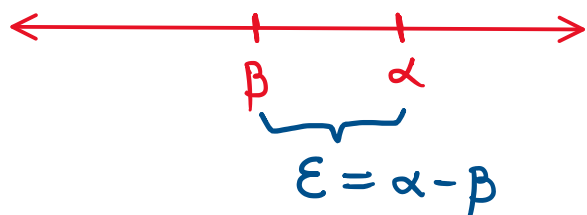
$$\Rightarrow \exists a \in A \quad \alpha - \alpha + \beta < a$$

$$\Rightarrow \exists a \in A \quad \beta < a \quad \Rightarrow \beta \text{ no es cota superior de } A !$$
$$\therefore \alpha \leq \beta$$

P.D. Si $\beta \in \mathbb{R}$ es cota superior de A , entonces $\alpha \leq \beta$

(Contrapuesta) P.D. $\alpha \not\leq \beta \Rightarrow \beta$ no es cota superior de A

Supongamos que $\alpha \not\leq \beta \Rightarrow \underline{\beta < \alpha} \Rightarrow \underline{0 < \alpha - \beta}$.



Sea $\varepsilon = \alpha - \beta \Rightarrow \varepsilon > 0$

Debido a 3), existe $a \in A$ t.q. $\alpha - \varepsilon < a$

$$\Rightarrow \exists a \in A \quad \alpha - (\alpha - \beta) < a$$

$$\Rightarrow \exists a \in A \quad \alpha - \alpha + \beta < a$$

$$\Rightarrow \exists a \in A \quad \beta < a \quad \therefore \beta \text{ no es cota superior de } A.$$