

- A está acotado superiormente si
 $\exists z \in \mathbb{R} \quad \forall a \in A \quad a \leq z$
- z es una cota superior de A si
 $\forall a \in A \quad a \leq z$

- A no está acotado superiormente si
 $\forall z \in \mathbb{R} \quad \exists a \in A \quad a > z$
 $(a \neq z)$
- z no es una cota superior de A si
 $\exists a \in A \quad a > z$
 $(a \neq z)$

- A está acotado inferiormente si:
 $\exists z \in \mathbb{R} \quad \forall a \in A \quad z \leq a$
- z es cota inferior de A si
 $\forall a \in A \quad z \leq a$

- A no está acotado inferiormente si
 $\forall z \in \mathbb{R} \quad \exists a \in A \quad a < z$
- z no es cota inferior de A si
 $\exists a \in A \quad a < z$

Proposición. Sea $A \subset \mathbb{R}$.



Si z es una cota superior de A, entonces todo número real mayor o igual a z es una cota superior de A. ✓✓

Proposición. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$.

Si z es una cota inferior de A, entonces todo número real menor o igual a z es una cota inferior de A.

Demostración. (Ejercicio)

Definición. Si $A \subset \mathbb{R}$, decimos que A tiene elemento máximo si existe $a_0 \in \mathbb{R}$ tal que

- 1) $a_0 \in A$
- 2) $\forall a \in A \quad a \leq a_0$ (a_0 es cota superior de A)

(a_0 es una cota superior de A que pertenece a A).

Ejemplos:

① $A = (-3, 5]$



Af. (Afirmación) 5 es elemento máximo de A

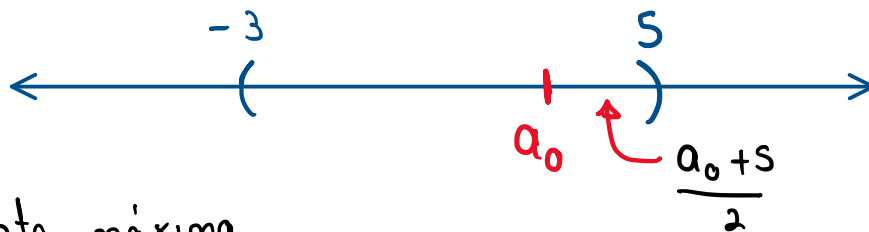
1) Como $-3 < 5 \leq 5 \Rightarrow 5 \in (-3, 5]$

2) Sea $a \in A \Rightarrow -3 < a \leq 5 \Rightarrow a \leq 5 \quad \therefore 5$ es cota superior de A

$\therefore 5$ es un elemento máximo de A

(no hemos demostrado la unicidad del elemento máximo)

② $A = (-3, 5)$



Af. A no tiene elemento máximo.

Supongamos que A tiene elemento máximo $\Rightarrow$ existe $a_0 \in \mathbb{R}$ tal que

1) $a_0 \in A$

*2) a_0 es cota superior de A ($\forall a \in A \quad a \leq a_0$)

Como $a_0 \in A = (-3, 5) \Rightarrow -3 < a_0 < 5 \Rightarrow -3 < a_0 < \frac{a_0+5}{2} < 5$

$\Rightarrow \frac{a_0+5}{2} \in (-3, 5) = A$, pero $a_0 < \frac{a_0+5}{2} \Rightarrow a_0$ no es cota superior de A! 2)

$\therefore A$ no tiene elemento máximo.

Proposición. Si $A \subset \mathbb{R}$ tiene elemento máximo, entonces este es único.

Demostración.

Supongamos que a_0 y a_1 son elementos máximos de A. (P.D. $a_0 = a_1$)

$\Rightarrow a_0, a_1 \in A$ y tanto a_0 como a_1 son cotas superiores de A.

Como a_0 es cota superior de A $\Rightarrow \forall a \in A \quad a \leq a_0$.

En particular, $a_1 \leq a_0$ (porque $a_1 \in A$).

Por otro lado, a_1 también es cota superior de A $\Rightarrow \forall a \in A \quad a \leq a_1$.

y como $a_0 \in A \Rightarrow a_0 \leq a_1$

$\Rightarrow a_1 \leq a_0 \quad y \quad a_0 \leq a_1 \quad \therefore a_0 = a_1$

Notación Si $A \subset \mathbb{R}$ tiene elemento máximo, entonces $\max(A)$ o $\max A$ denotarán al elemento máximo de A .

$$\max(-3, 5] = 5$$

$$\max\{-8, 3, 7, 0\} = 7$$

Definición. Si $A \subset \mathbb{R}$, decimos que A tiene elemento mínimo si existe $a_0 \in \mathbb{R}$ tal que

1) $a_0 \in A$

2) $\forall a \in A \quad a_0 \leq a$ (a_0 es cota inferior de A)

(a_0 es una cota inferior de A que pertenece a A).

Proposición. Si $A \subset \mathbb{R}$ tiene elemento mínimo, entonces este es único.

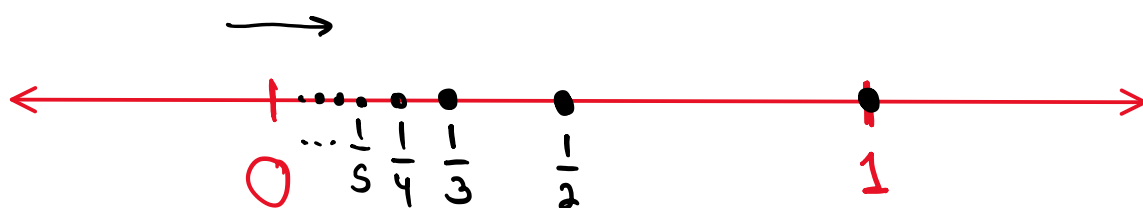
Demostración. (Ejercicio).

Ejemplos. Sean $a < b$

① $\min[a, b) = a$

② $\min(a, b)$ no existe ((a, b) no tiene elemento mínimo).

③ Sea $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$



i) $\max(A) = 1$

1) P.D. $1 \in A$

Si $n = 1 \Rightarrow \frac{1}{n} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow 1 \in A$

2) P.D. $\forall a \in A \quad a \leq 1$

Sea $a \in A \Rightarrow a = \frac{1}{n}$ para alguna $n \in \mathbb{N}$ (P.D. $\frac{1}{n} \leq 1$).

Como $n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 < \underline{1} \leq n$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{1}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{n} \leq 1$$

$\therefore 1$ es cota superior de A

$$\therefore 1 = \max(A)$$

$$* 0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

$$0 < a \leq b \Rightarrow \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$$

$$a < 0 < b \not\Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

ii) A no tiene elemento mínimo

$$A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

Prueba 1: (Por contradicción)

Supongamos que A tiene elemento mínimo. Sea $a_0 = \min(A)$

$$\Rightarrow a_0 \in A \text{ y } \underline{\forall a \in A \quad a_0 \leq a}$$

Como $a_0 \in A \Rightarrow$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_0 = \frac{1}{n}$.



Notemos que como $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{n+1} \in A$.

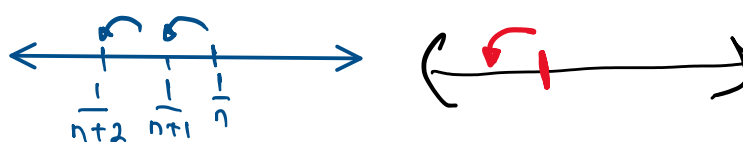
Además, $0 < n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_0 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < a_0$! (a_0 es cota inferior de A)

$\therefore A$ no tiene elemento mínimo.

Prueba 2: * Demostrar que ningún elemento de A es cota inferior de A .

Sea $a_0 \in A$.

P.D. a_0 no es cota inferior de A .



Como $a_0 \in A \Rightarrow$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_0 = \frac{1}{n}$.



Notemos que como $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{n+1} \in A$.

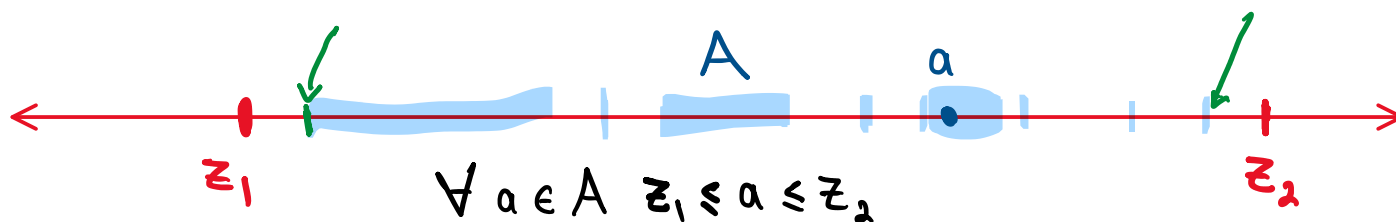
Además, $0 < n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_0 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < a_0$

$\therefore a_0$ no es cota inferior de A

$\therefore A$ no tiene elemento mínimo.

* Si queremos demostrar que un conjunto A no tiene máximo, basta probar que cualquier elemento de A no es cota superior de A .

Definición. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ está acotado si está acotado inferiormente y superiormente, es decir, existen $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ tales que para toda $a \in A$ se cumple que $z_1 \leq a \leq z_2$.



Teorema Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Son equivalentes:

1) A está acotado

2) existe $M > 0$ ($M \in \mathbb{R}$) tal que $\forall a \in A \quad |a| \leq M$

Demostración

2) $\Rightarrow$ 1) Sea $M > 0$ tal que

$$\forall a \in A \quad |a| \leq M$$

$$\Rightarrow \forall a \in A \quad -M \leq a \leq M$$

$\Rightarrow -M$ es cota inferior de A y M es cota superior de A

$\therefore A$ está acotado.

$$|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$$

$$|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$$

1) $\Rightarrow$ 2) Sup. que A está acotado.

Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$(*) \quad \forall a \in A \quad z_1 \leq a \leq z_2$$

Definimos $M = \max\{|z_1|, |z_2|\} + 1$.

Como $|z_1|, |z_2| \geq 0 \Rightarrow \max\{|z_1|, |z_2|\} \geq 0$

$$\Rightarrow M = \max\{|z_1|, |z_2|\} + 1 > 0$$

$$\therefore M > 0.$$

$$\begin{array}{cc} \min\{a, b\} & \max\{a, b\} \\ \downarrow & \downarrow \\ a & b \end{array}$$

$$\max\{-8, -3\} = -3$$

$$a \leq \max\{a, b\}$$

$$b \leq \max\{a, b\}$$

— p.d. $\forall a \in A \quad |a| \leq M$

Sea $a \in A \Rightarrow z_1 \leq a \leq z_2$. (p.d. $-M \leq z_1 \leq a \leq z_2 \leq M$)
 (*) $-M < z_1$

Sabemos que $z_2 \leq |z_2| \leq \max\{|z_1|, |z_2|\} < \max\{|z_1|, |z_2|\} + 1 = M$
 $\Rightarrow z_2 < M$

Similarmente,

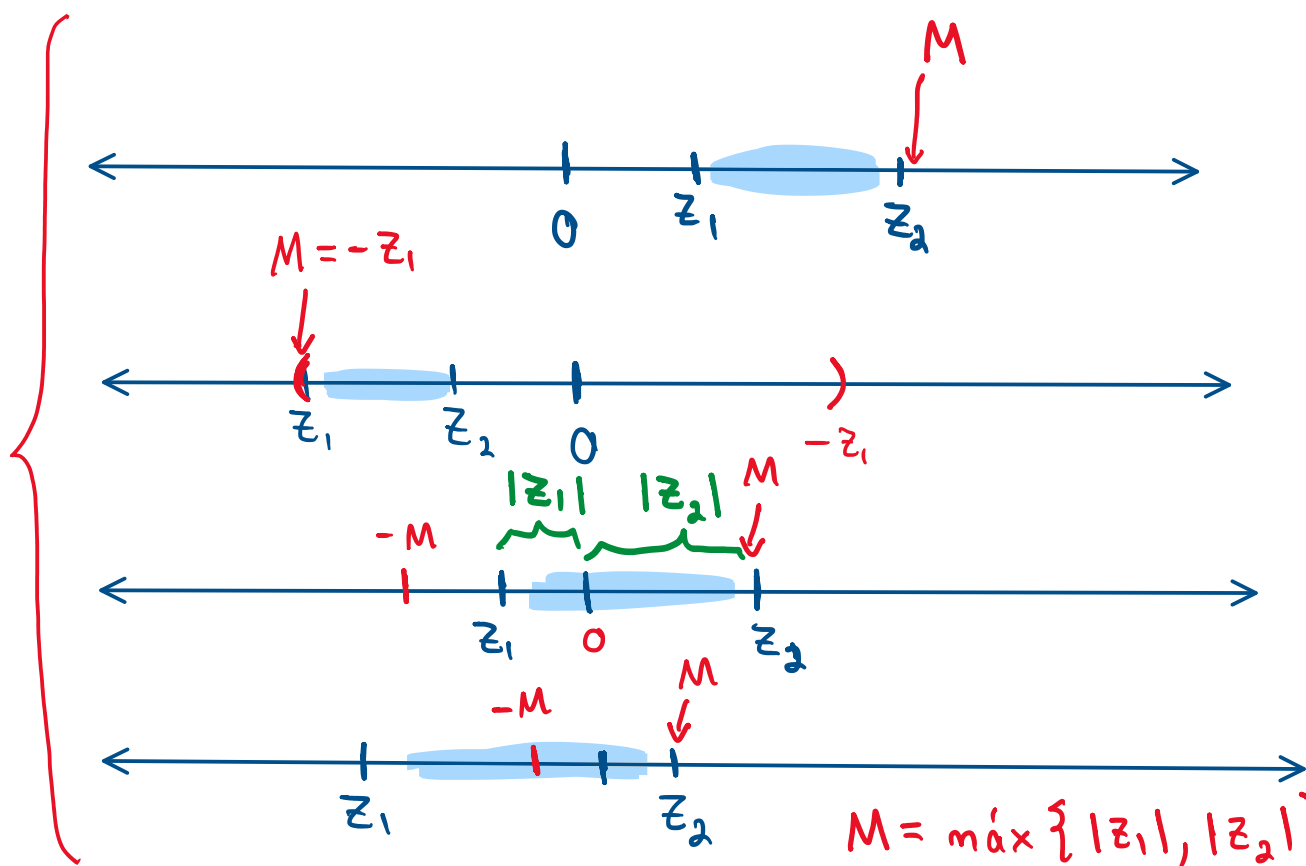
$-z_1 \leq |-z_1| = |z_1| \leq \max\{|z_1|, |z_2|\} < \max\{|z_1|, |z_2|\} + 1 = M$
 $\Rightarrow -z_1 < M$
 (-1)
 $\Rightarrow -M < z_1$

$\Rightarrow -M < z_1 \leq a \leq z_2 < M \Rightarrow -M < a < M$

$\Rightarrow |a| < M \Rightarrow |a| \leq M$
 para toda $a \in A$.

$\therefore$ se cumple 2)

Idea
 para
 $1 \Rightarrow 2$



$M = \max\{|z_1|, |z_2|\} + 1$

para garantizar
 que $M > 0$