

Definición. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Definimos:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

intervalo cerrado

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

} intervalos semiabiertos

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

intervalo abierto

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$$

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$

} "rayos"

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$$

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$



Definición. Sea $A \subset \mathbb{R}$

Decimos que A está acotado superiormente si existe $z \in \mathbb{R}$ tal que para toda $a \in A$ se cumple que $a \leq z$. En este caso, decimos que z es una cota superior de A .

Con símbolos:

• A está acotado superiormente si

$$\exists z \in \mathbb{R} \quad \forall a \in A \quad a \leq z$$

• z es una cota superior de A si

$$\forall a \in A \quad a \leq z$$

• A no está acotado superiormente si

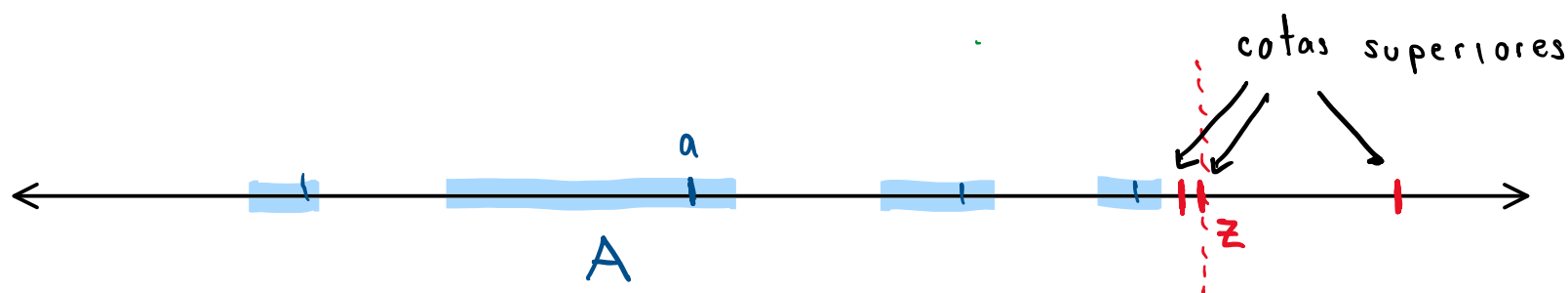
$$\forall z \in \mathbb{R} \quad \exists a \in A \quad a > z$$

$$(a \neq z)$$

• z no es una cota superior de A si

$$\exists a \in A \quad a > z$$

$$(a \neq z)$$

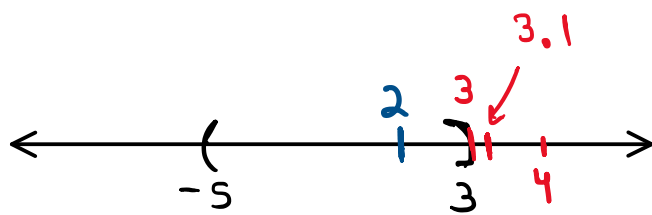


• Una cota superior de A puede pertenecer o no pertenecer a A .

Ejemplos:

① $A = (-5, 3]$

$$= \{a \in \mathbb{R} \mid -5 < a \leq 3\}$$



- 3 es una cota superior de A porque $\forall a \in A \quad a \leq 3$.
- 3.1 es una cota superior de A porque $\forall a \in A \quad a \leq 3.1$
- 4 " " $a \leq 4$

- 2 no es cota superior de A porque $2.5 \in A$ y $2.5 \nless 2$

Proposición. Sea $A \subset \mathbb{R}$.

Si z es una cota superior de A, entonces todo número real mayor o igual a z es cota superior de A.

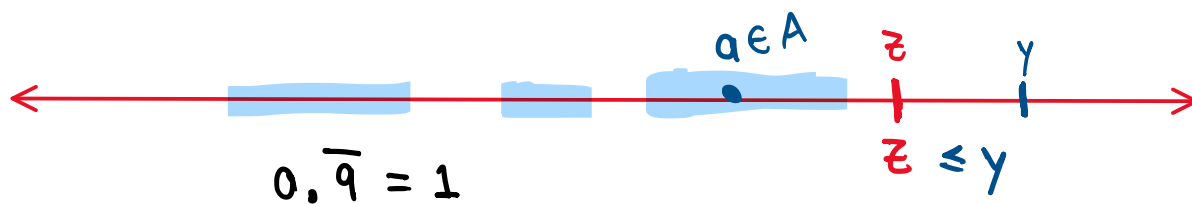
Demostración

Supongamos que z es cota superior de A. Sea $y \geq z$.

Como z es cota superior de A, $\forall a \in A \quad a \leq z$.

Sea $a \in A \Rightarrow a \leq z$ y $y \geq z \Rightarrow a \leq y$ para cada $a \in A$

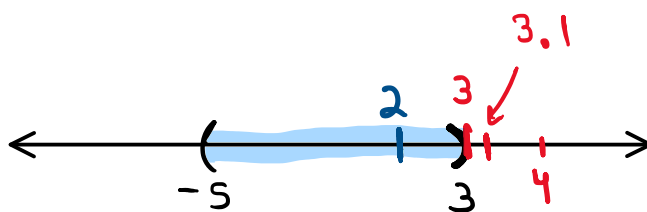
$\therefore y$ es cota superior de A.



$$a < 3 \Rightarrow a \leq 3$$

② $A = (-5, 3)$

$$= \{a \in \mathbb{R} \mid -5 < a < 3\}$$

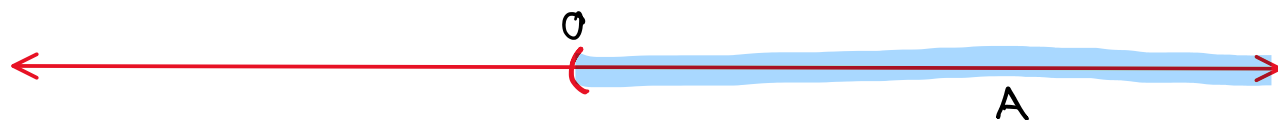


- 3 es una cota superior de A porque $\forall a \in A \quad a \leq 3$.
- 3.1 es una cota superior de A porque $\forall a \in A \quad a \leq 3.1$
- 4 " " $a \leq 4$

- 2 no es cota superior de A porque $2.5 \in A$ y $2.5 \nless 2$
($2.5 > 2$)

$2.\bar{9} = 3$ ¿Puedes encontrar un número entre $2.\bar{9}$ y 3 ? $2.\bar{9} < x < 3$

③ $A = \mathbb{R}^+ = (0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ no está acotado superiormente.



P.D. $\neg (\exists z \in \mathbb{R} \forall x \in A \quad x \leq z)$

→ P.D. $\forall z \in \mathbb{R} \exists x \in A \quad x > z$

$z = 1 \rightarrow \exists x = 1.2$

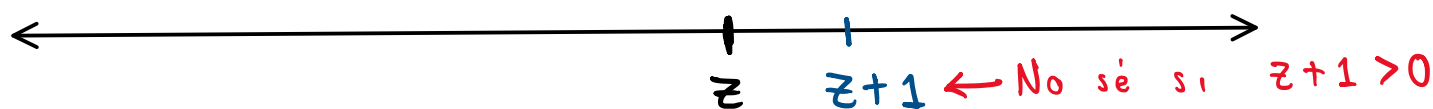
$z = -8 \rightarrow x = 3$

$z = 1000 \rightarrow x = 1001$

$x = 8$

• Sea $z \in \mathbb{R}$. P.D. $\exists x \in A \quad x > z$

Definimos $x = |z| + 1$.



Notemos que $|z| \geq 0 \Rightarrow |z| + 1 \geq 1 \Rightarrow |z| + 1 > 0 \Rightarrow |z| + 1 \in A.$
 $\Rightarrow x \in A$

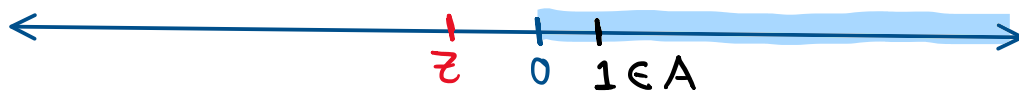
Además, $z \leq |z| < |z| + 1 \Rightarrow z < |z| + 1 \Rightarrow z < x.$

$\therefore A$ no está acotado superiormente

Otra Forma:

• Sea $z \in \mathbb{R}$. P.D. $\exists x \in A \quad x > z$. * cualquier número positivo funciona

Caso 1) Si $z \leq 0$, sea $x = 1 \Rightarrow x \in A$ y $z < x$ ✓



Caso 2) Si $z > 0$, sea $x = z + 1$. Como $0 < z < z + 1 = x$

$\Rightarrow 0 < x \Rightarrow x \in A.$

y $z < x$



$\therefore A$ no está acotado superiormente.

Definición. Sea $A \subset \mathbb{R}$

Decimos que A está acotado inferiormente si existe $z \in \mathbb{R}$ tal que para toda $a \in A$ se cumple que $z \leq a$. En este caso, decimos que z es una cota inferior de A .

Con símbolos:

• A está acotado inferiormente si:

$$\exists z \in \mathbb{R} \quad \forall a \in A \quad z \leq a$$

• A no está acotado inferiormente si:

$$\forall z \in \mathbb{R} \quad \exists a \in A \quad a < z$$

• z es cota inferior de A si

$$\forall a \in A \quad z \leq a$$

• z no es cota inferior de A si

$$\exists a \in A \quad a < z$$

Ejemplos:

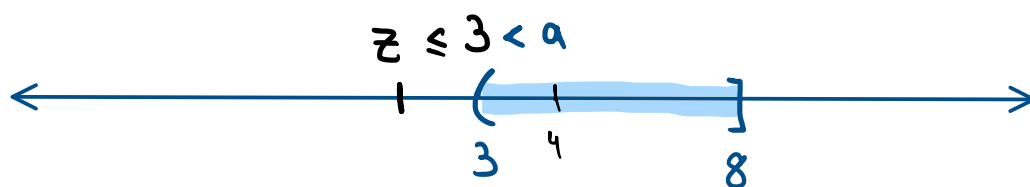
① $A = [3, 8]$

* Cualquier número real $z \leq 3$ es cota inferior de A .

Dem. Sea $z \leq 3$. P.D. $\forall a \in A \quad z \leq a$.

$$\text{Sea } a \in A \Rightarrow 3 < a \leq 8 \Rightarrow z \leq 3 < a \Rightarrow z < a \Rightarrow z \leq a$$

$\therefore z$ es cota inferior de A .



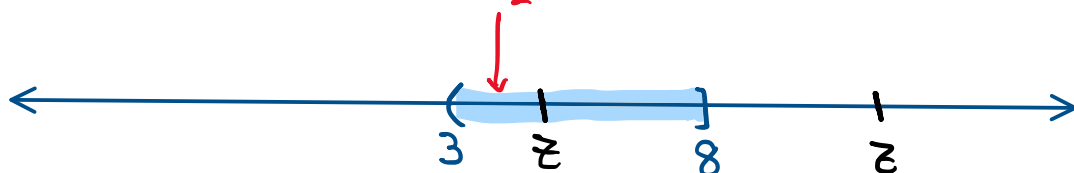
• 4 no es cota inferior de A porque $3.1 \in A$ y $4 \not\leq 3.1$

* Cualquier número real $z > 3$ no es cota inferior de A

• Dem. (Por contradicción) Sea $z > 3$ y supongamos que z sí es cota inferior de A .

$$\Rightarrow \forall a \in A \quad z \leq a$$

$$a = \frac{3+z}{2} \in A$$



Caso 1) Si $8 < z$, como $7 \in A$ y $z \neq 7$ (porque $8 < z$)

$\Rightarrow z$ no es cota inferior de A !

Caso 2) Si $3 < z \leq 8$, sea $a = \frac{3+z}{2} \Rightarrow 3 < a < z \leq 8$

$\Rightarrow a \in (3, 8] = A \Rightarrow a \in A$, pero $a < z$!

$\therefore z$ no es cota inferior de A .

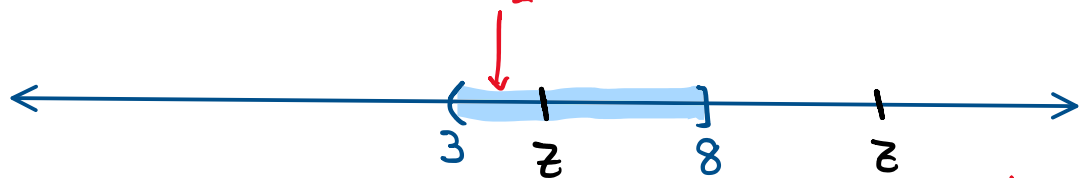
Otra demostración:

* Cualquier número real $z > 3$ no es cota inferior de A

• Dem. Sea $z > 3$. P.D. z no es cota inferior de A

P.D. $\exists a \in A$ $a < z$

$$a = \frac{3+z}{2} \in A$$



Caso 1) Si $8 < z$, sea $a = 7 \Rightarrow a \in (3, 8] = A$ (porque $3 < a \leq 8$) y como $a = 7 < 8 < z \Rightarrow a < z$.

Caso 2) Si $3 < z \leq 8$, sea $a = \frac{3+z}{2} \Rightarrow 3 < a < z \leq 8$

$\Rightarrow a \in (3, 8] = A \Rightarrow a \in A$ y $a < z$.

$\therefore z$ no es cota inferior de A .

② $[3, 8]$

Definición. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ está acotado si está acotado inferiormente y superiormente, es decir, existen $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ tales que para toda $a \in A$ se cumple que $z_1 \leq a \leq z_2$.

