

Teorema. (Desigualdad del triángulo)

Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$|a+b| \leq |a|+|b|$$

Otra demostración:

Por un teorema anterior, sabemos que

$$\begin{aligned} -|a| &\leq a \leq |a| \\ -|b| &\leq b \leq |b| \end{aligned} \quad y$$

$$\Rightarrow -|a|-|b| \leq a+b \leq |a|+|b|$$

$$\Rightarrow -(|a|+|b|) \leq a+b \leq |a|+|b|$$

$$\Rightarrow |a+b| \leq |a|+|b|.$$

s. $b \geq 0$

$$-b \leq a \leq b$$



$$|a| \leq b$$



Corolario. Para cualesquiera $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$|a_1 + \dots + a_n| \leq |a_1| + \dots + |a_n|$$

Demostración.

(Por inducción sobre n)

$$n=1 \quad |a_1| \leq |a_1|$$

$$n=2 \quad |a_1+a_2| \leq |a_1|+|a_2|$$

(Base $n=2$)

Por la desigualdad del triángulo, sabemos que si $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, entonces

$$|a_1+a_2| \leq |a_1|+|a_2|.$$

(Paso inductivo)

Sea $n \geq 2$ ($n \in \mathbb{N}$) y supongamos que si $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, entonces

$$\underbrace{|a_1 + \dots + a_n|}_{n \text{ números}} \leq |a_1| + \dots + |a_n| \quad (\text{hipótesis de inducción})$$

(Estamos suponiendo que la desigualdad se cumple para n números reales)

Sean $a_1, \dots, a_n, a_{n+1} \in \mathbb{R}$.

$$\text{P.D. } \underbrace{|a_1 + \dots + a_{n+1}|}_{n+1 \text{ números}} \leq |a_1| + \dots + |a_{n+1}|$$

$$|a_1 + \dots + a_n + a_{n+1}| = |(\underbrace{a_1 + \dots + a_n}_{n \text{ números}}) + \underbrace{a_{n+1}}_{\text{un número}}|$$

$$\leq \underbrace{|a_1 + \dots + a_n|}_{n \text{ números}} + |a_{n+1}|$$

por la desigualdad del triángulo aplicada a $(a_1 + \dots + a_n)$ y a_{n+1}

$$\leq \underbrace{|a_1| + \dots + |a_n|}_{n \text{ números}} + |a_{n+1}| \quad (\text{por hipótesis de inducción}).$$

$$\therefore |a_1 + \dots + a_n + a_{n+1}| \leq |a_1| + \dots + |a_n| + |a_{n+1}| \quad \square$$

$$|a_1 + a_2 + a_3| = |(\underbrace{a_1 + a_2}_{2 \text{ números}}) + \underbrace{a_3}_{1 \text{ número}}| \leq |a_1 + a_2| + |a_3|$$

$$\leq |a_1| + |a_2| + |a_3|$$

$$|(\underbrace{a_1 + a_2 + a_3}_{3 \text{ números}}) + a_4| \leq |a_1 + a_2 + a_3| + |a_4|$$

$$\leq |a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4|$$

$$A \subset B \Rightarrow A \setminus C \subset B \setminus C$$

Sup. que $A \subset B$.

P.D. $A \setminus C \subset B \setminus C$

Sea $x \in A \setminus C$. . . $\Rightarrow x \in B \setminus C$

$$5(b) \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \leftarrow \text{clase}$$

$$\begin{array}{ccccccc} P & \vee & (Q & \wedge & R) & \equiv & (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \\ & & \wedge & & \vee & & \wedge \\ & & & & & & \vee \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow a+b \in \mathbb{Q} \\ \quad \quad \quad ab \in \mathbb{Q} \end{array}}$$

Teorema Si $a, b \in \mathbb{Q}$, entonces

$$1) \quad a+b \in \mathbb{Q}$$

$$2) \quad ab \in \mathbb{Q}$$

$$3) \quad -a \in \mathbb{Q}$$

$$4) \quad \frac{1}{a} \in \mathbb{Q} \quad \text{si } a \neq 0$$

$$5) \quad a-b \in \mathbb{Q}$$

$$6) \quad \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \quad \text{si } b \neq 0$$

Ejercicio

Demostración.

Como $a, b \in \mathbb{Q}$, existen $n, m, p, q \in \mathbb{Z}$ tales que $m \neq 0 \neq q$ y

$$a = \frac{n}{m} \quad \text{y} \quad b = \frac{p}{q}$$

$$\Rightarrow a+b = \frac{n}{m} + \frac{p}{q} = \frac{nq+mp}{mq}, \quad \text{donde } nq+mp \in \mathbb{Z}, \quad mq \in \mathbb{Z}$$

y $mq \neq 0$ porque $m \neq 0$ y $q \neq 0$.

$$\Rightarrow \boxed{a+b \in \mathbb{Q} .}$$

Además,

$$ab = \left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{np}{mq}, \quad \text{donde } np \in \mathbb{Z}, \quad mq \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad mq \neq 0.$$

$$\Rightarrow \boxed{ab \in \mathbb{Q}}$$

Por otro lado

$$-a = -\frac{n}{m} = \frac{-n}{m}, \quad \text{donde } -n \in \mathbb{Z}, \quad m \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad m \neq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{-a \in \mathbb{Q}}$$

Corolario

Si $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y $r \in \mathbb{Q}$, entonces $a+r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Demostración

Supongamos que $a+r \in \mathbb{Q}$.

$$\text{Como } r \in \mathbb{Q} \Rightarrow -r \in \mathbb{Q} \Rightarrow (a+r) + (-r) \in \mathbb{Q} \\ \Rightarrow a \in \mathbb{Q}!$$

$$\therefore a+r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

$$\text{Si } \underline{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}, \quad \underline{r \in \mathbb{Q}} \quad \text{y} \quad \underline{r \neq 0} \Rightarrow \boxed{\underline{rx \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}}$$

$$\text{Sup. } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

$$r \in \mathbb{Q}$$

$$r \neq 0$$

$$\text{y } \boxed{rx \in \mathbb{Q}}$$

Por contradicción

$$A \subsetneq B \iff A \subset B \wedge A \neq B$$

A es subconjunto
propio de B

15) Encuentre $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que

$$0 < a < b$$

$$c < d < 0$$

$$\text{y (a) } ac < bd$$

$$\text{Sean } a = _, \dots, d = _$$

$$\Rightarrow ac = (_)(_) = _ < (_)(_) = bd$$

14) $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

(a) si $ab < 0$, entonces $(a > 0 \text{ y } b < 0)$ o $(a < 0 \text{ y } b > 0)$

Sup. que $ab < 0$.

Como $a \in \mathbb{R}$, entonces $a > 0$, $a = 0$ o $a < 0$ (tricotomía)

Caso 1) Si $a = 0$, entonces $ab = (0)b = 0!$

$\therefore$ este caso no es posible

Caso 2) Si $a > 0 \dots \Rightarrow b < 0$

Caso 3) Si $a < 0 \dots \Rightarrow b > 0$

$\therefore a > 0 \text{ y } b < 0$, o bien, $a < 0 \text{ y } b > 0$

(b) $\boxed{a \leq b \text{ y } c < d} \Rightarrow a + c < b + d$

Supongamos que $a \leq b$ y $c < d$

P.D. $a + c < b + d$

$$a \leq b \quad b-a \in P \cup \{0\} \Rightarrow \underline{b-a \in P} \quad \text{o} \quad \underline{b-a=0}$$

$$c < d \quad \underline{d-c \in P}$$

$$\text{Si } b-a \in P \Rightarrow (b-a) + (d-c) \in P$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow a+c < b+d$$

$$\text{Si } b-a=0 \Rightarrow \underline{(b-a) + (d-c)} = 0 + (d-c) = d-c \in \underline{P}$$

$$\Rightarrow a+c < b+d$$

$$a < b \Leftrightarrow b-a \in P$$

$$a \leq b \Leftrightarrow b-a \in P \quad \text{o} \quad b-a=0$$

$$(b) \quad a \leq b \quad \text{y} \quad c < d \Rightarrow a+c < b+d$$

$$\text{Como } a \leq b \Rightarrow a < b \quad \text{o} \quad a=b$$

$$\bullet \text{ Si } \underline{a < b}, \quad \text{como } \underline{c < d} \Rightarrow \underline{a+c < b+d} \quad (\text{P.A.T.V.C.})$$

(Inciso 2)

$$\bullet \text{ Si } \underline{a=b}, \quad \text{como } c < d \Rightarrow a+c < a+d$$

$\uparrow$ Inciso 1)

$$\Rightarrow \underline{a+c < b+d} \quad (\text{porque } a=b)$$

$$14 \text{ i)} \quad \text{Si } 0 < a < b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

$$\text{Sup. que } 0 < a < b \Rightarrow 0 < a \quad \text{y} \quad 0 < b \quad (\text{transitividad})$$

$$\Rightarrow \underline{0 < a^{-1}} \quad \text{y} \quad 0 < b^{-1} \quad (\text{Teorema})$$

$$\text{Dado que } a < b \Rightarrow a^{-1}a < a^{-1}b \quad (0 < a^{-1})$$

$$\Rightarrow 1 < a^{-1}b$$

$$\Rightarrow 1 \cdot b^{-1} < (a^{-1}b)b^{-1} \quad (b^{-1} > 0)$$

$$\Rightarrow b^{-1} < a^{-1}$$

$$\Rightarrow 0 < b^{-1} < a^{-1}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

i') S, $a < b < 0 \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$

$$-5 < -1$$

$$-\frac{1}{5} > -1$$

(h) $0 \leq a < b \Rightarrow$ $\overset{\text{P.D.}}{a^2 \leq ab < b^2}$

P.D. 1) $a^2 \leq ab$ y 2) $ab < b^2$ ✓

2) Como $a < b$ y $0 < b \Rightarrow ab < b^2$

1) S, $0 < a \Rightarrow a^2 < ab \Rightarrow a^2 \leq ab$

S, $0 = a \Rightarrow a^2 = 0 = ab \Rightarrow a^2 \leq ab$