

Teorema. Sean $a, b \in \mathbb{R}$

* 1) $|a| = 0$ si y solo si $a = 0$

* 2) $|-a| = |a|$

3) $|ab| = |a| \cdot |b|$

4) Si $b \geq 0$, entonces $|a| \leq b$ si y solo si $-b \leq a \leq b$

* 5) $-|a| \leq a \leq |a|$

6) $|a|^2 = a^2$

Corolario (ejercicio)

• $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$ para toda $a, b \in \mathbb{R}$

• $|a^n| = |a|^n$ para toda $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

⊙ Lema. Si $b \geq 0$, entonces

$$\underline{|a| \leq b} \iff \underline{a \leq b} \text{ y } \underline{-a \leq b}$$

Demostración

Por 4) del teorema anterior,

$$\begin{aligned} |a| \leq b &\iff -b \leq a \leq b \iff -b \leq a \text{ y } a \leq b \\ &\iff \overset{-1}{b} \geq -a \text{ y } a \leq b \iff a \leq b \text{ y } -a \leq b \quad \square \end{aligned}$$

Observación: En general $|a+b| \neq |a|+|b|$

Por ejemplo, si $a = -5$ y $b = 2 \Rightarrow |a+b| = |-5+2| = |-3| = 3$
y $|a|+|b| = |-5|+|2| = 5+2 = 7$
 $\Rightarrow |a+b| \neq |a|+|b|$

Lema. Si $a, b \geq 0$, entonces $a \leq b \iff a^2 \leq b^2$

$\Rightarrow$] Sup. que $a \leq b$. Como $a, b \geq 0$, multiplicando por a y por b obtenemos que $a^2 \leq ab$ y $ab \leq b^2$
 $\Rightarrow a^2 \leq b^2$ (por transitividad).

$\Leftarrow$] Sup. ahora que $a^2 \leq b^2$ (*)

¿Y ahora? $\leadsto$ Reducción al absurdo / contradicción
 $\searrow$ Contrapuesta

(Por contradicción)

Supongamos que $a \not\leq b \Rightarrow a > b$. Como $b \geq 0$ y $a > b \Rightarrow a > 0$.

Multiplicando ambos lados de $a > b$ por a y por b obtenemos que $a^2 > ab$ y $ab > b^2$
($a > 0$) ($b \geq 0$)

$\Rightarrow a^2 > b^2$! (*)

$\therefore a \leq b$.

Otra Forma:

$\Leftarrow$] (Por contrapuesta/contrapositiva)

P.O. $a > b \Rightarrow a^2 > b^2$

$a \leq b \iff a^2 \leq b^2$
Contrapuesta $\left\{ \begin{array}{l} a \not\leq b \Rightarrow a^2 \not\leq b^2 \\ a > b \Rightarrow a^2 > b^2 \end{array} \right.$

Supongamos que $a > b \Rightarrow a > \underbrace{b \geq 0}_{\text{hipótesis del Lema}} \Rightarrow a > 0$.

Multiplicando ambos lados de $a > b$ por a y por b obtenemos que $a^2 > ab$ y $ab > b^2$
($a > 0$) ($b \geq 0$)

$\Rightarrow a^2 > b^2$ (por transitividad).

$\therefore a > b \Rightarrow a^2 > b^2$ o, equivalentemente, $a \leq b \iff a^2 \leq b^2$.

$$\neg (P \rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$$

$$P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$$

Contrapositiva

$$a, b \geq 0$$

$$a \leq b \iff a^2 \leq b^2$$

$$x \leq y \leq z \leq w \leq p \leq q \Rightarrow x \leq q$$

$$x = y \leq z = w = p \leq q \Rightarrow x \leq q$$

$$x = y < z \leq w = p \leq q \Rightarrow x < q$$

* Teorema. (Desigualdad del triángulo)

Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

Más aún, la igualdad se satisface si y solo si a y b tienen el mismo signo.

Demostración.

Demostración:

Demostraremos que $(|a+b|)^2 \leq (|a|+|b|)^2$

$$x = y$$

$$x \leq y$$

$$(|a+b|)^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$|a|^2 = a^2 \quad \rightarrow \quad = |a|^2 + \boxed{2ab} + |b|^2$$

$$\leq |a|^2 + |2ab| + |b|^2$$

$$= |a|^2 + 2|a| \cdot |b| + |b|^2$$

$$= (|a| + |b|)^2$$

$$\Rightarrow (|a+b|)^2 \leq (|a|+|b|)^2$$

Como $|a+b| \geq 0$ y $|a|+|b| \geq 0$, por el lema anterior concluimos que $|a+b| \leq |a|+|b|$

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

5) del teo. anterior
 $a \leq |a|$

$$(2ab \leq |2ab|)$$

$$(|2ab| = 2|a| \cdot |b|)$$

Notemos ahora que

$$|a+b| = |a|+|b| \Leftrightarrow |a|^2 + 2ab + |b|^2 = |a|^2 + |2ab| + |b|^2$$

$$\Leftrightarrow 2ab = |2ab|$$

$$\Leftrightarrow 2ab \geq 0$$

$$\Leftrightarrow ab \geq 0 \quad (\text{mult. por } \frac{1}{2})$$

$$\Leftrightarrow (a \geq 0 \wedge b \geq 0) \vee (a \leq 0 \wedge b \leq 0)$$

$\therefore |a+b| = |a|+|b| \Leftrightarrow a$ y b tienen el mismo signo.

Observación En general $|a-b| \neq |a|-|b|$

Si $a=5$ y $b=-3$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} |a-b| = |5-(-3)| = |8| = 8 \\ |a|-|b| = |5|-|-3| = 5-3 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow |a-b| \neq |a|-|b|$$

Corolario. Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene que

1) $|a-b| \leq |a|+|b|$

2) $||a|-|b|| \leq |a-b|$ (Desigualdad del triángulo para la resta)

$$|a+b| \leq |a|+|b|$$

Demostración.

1) Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Como $a, -b \in \mathbb{R}$, por la desigualdad de triángulo tenemos que

$$|a-b| = |a+(-b)| \leq |a| + \underline{|-b|} = |a| + \underline{|b|}$$

$$\Rightarrow |a-b| \leq |a|+|b|$$

$$(|-b| = |b|)$$

2) Usando el Lema ③, demostraremos que

$$i) |a| - |b| \leq |a - b| \quad \text{y} \quad ii) -(|a| - |b|) \leq |a - b|$$

$$|a| \leq |a - b| + |b|$$

$$-|a| + |b| \leq |a - b|$$

Por la desigualdad del triángulo:

$$|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$$

$$\Rightarrow |a| \leq |a - b| + |b|$$

$$\Rightarrow |a| - |b| \leq |a - b| \quad (*) \quad \text{para toda } a, b \in \mathbb{R}$$

Intercambiando a con b obtenemos que

$$|b| - |a| \leq |b - a| \Rightarrow -(|a| - |b|) \leq |a - b| \quad (**)$$

$$(|b - a| = |-(b - a)| = |a - b|)$$

Por el Lema ③, deducimos de $(*)$ y $(**)$ que

$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

* Lema ③:

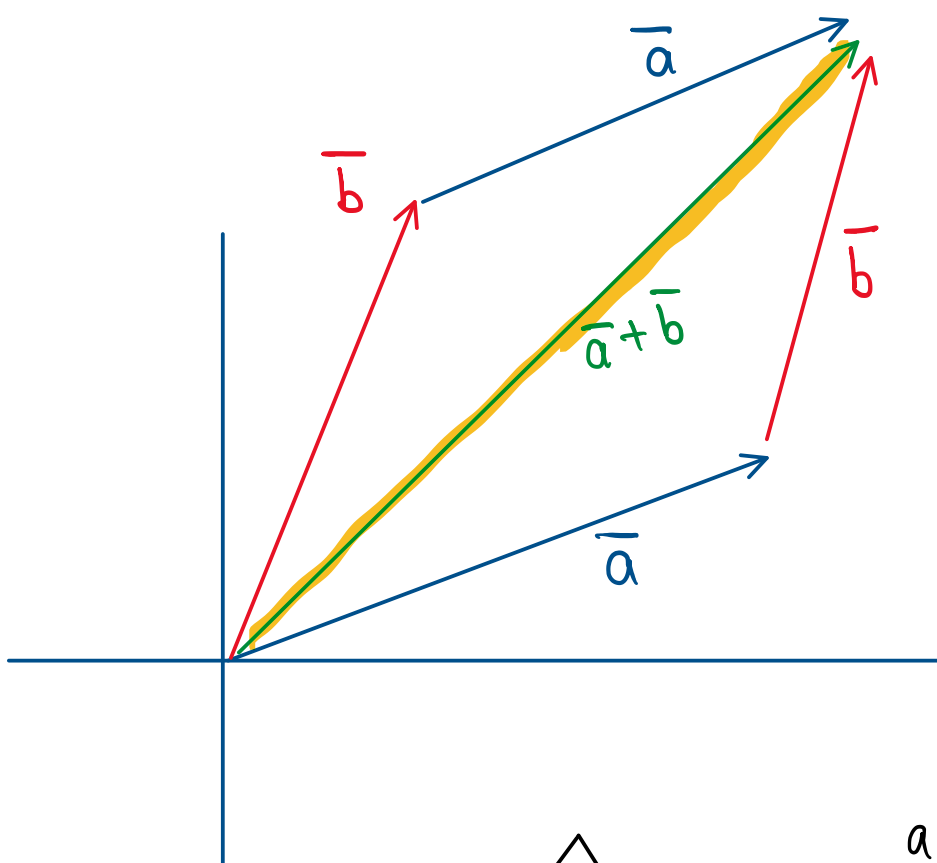
Si $b \geq 0$, entonces $|a| \leq b \Leftrightarrow a \leq b \wedge -a \leq b$

Ejemplo:

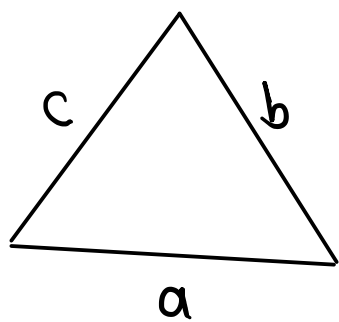
Si $a = 6$ y $b = -3$, entonces

$$||a| - |b|| = ||6| - |-3|| = |6 - 3| = 3 \Rightarrow ||a| - |b|| < |a - b|$$

$$\text{y } |a - b| = |6 - (-3)| = |9| = 9$$



$$\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$$



$$a \leq b + c$$

$$b \leq a + c$$

$$c \leq a + b$$