

Conjeturar una desigualdad entre n^2 y $n!$, y demostrar la conjetura propuesta por inducción.

Conjetura:

$$n^2 \leq n! \text{ para toda } n \geq 4$$

(Base $n=4$)

$$4^2 = 16 \text{ y } 4! = (1)(2)(3)(4) = 24$$

$$\Rightarrow 4^2 \leq 4!$$

$$\therefore n^2 \leq n! \text{ si } n=4.$$

(Paso inductivo)

Sea $k \geq 4$ y sup. que $k^2 \leq k!$ (hipótesis de inducción)

$$\text{P.D. } (k+1)^2 \leq (k+1)!$$

$$\text{P.D. } k^2 + 2k + 1 \leq (k+1)(k!)$$

$$\text{Como } k^2 \leq k! \text{ y } k+1 > 0 \Rightarrow k^2(k+1) \leq k!(k+1) \\ \Rightarrow k^3 + k^2 \leq (k+1)! (*)$$

Idea:

Me gustaría que $k^2 + 2k + 1 \leq k^3 + k^2$

$$2k + 1 \leq k^3$$

$$1 \leq k \Rightarrow 2k + 1 \leq 2k + k = 3k$$

$$3 \leq k \Rightarrow 3k \leq k^2$$

$$2k + 1 \leq k^2 \leq k^3$$

• Dado que $1 \leq k$ (porque $k \geq 4$)

$$\Rightarrow 2k + 1 \leq 2k + k$$

$$\Rightarrow 2k + 1 \leq 3k$$

• Por otro lado, $3 \leq k \Rightarrow 3k \leq k \cdot k$

$$\Rightarrow 3k \leq k^2$$

• Además, $1 \leq k \Rightarrow 1 \cdot k^2 \leq k \cdot k^2$ ($k^2 > 0$)

$$\Rightarrow k^2 \leq k^3$$

n	n^2	$n!$
1	1	1
2	4	2
3	9	6
4	16	24
5	25	120
6	36	720
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$$\begin{aligned} \text{Luego, } 2k+1 \leq 3k \leq k^2 \leq k^3 &\Rightarrow 2k+1 \leq k^3 \\ &\Rightarrow k^2 + 2k+1 \leq k^2 + k^3 \leq (k+1)! \\ &\Rightarrow (k+1)^2 \leq (k+1)! \quad (*) \end{aligned}$$

Por el P.I.M. concluimos que $n^2 \leq n!$ para toda $n \geq 4$ ($n \in \mathbb{N}$)

Definición. Si $a \in \mathbb{R}$, el valor absoluto de a , denotado por $|a|$, está definido por:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a > 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Por ejemplo, $|8| = 8$, $|0| = 0$ y $|-5| = 5$.

Teorema. Sean $a, b \in \mathbb{R}$

- 1) $|a| = 0$ si y solo si $a = 0$
- 2) $|-a| = |a|$
- 3) $|ab| = |a| \cdot |b|$
- 4) Si $b \geq 0$, entonces $|a| \leq b$ si y solo si $-b \leq a \leq b$
- 5) $-|a| \leq a \leq |a|$
- 6) $|a|^2 = a^2$

Demostración.

1) $\Leftarrow$ Si $a = 0 \Rightarrow |a| = 0$ por definición.

$\Rightarrow$ P.D. si $|a| = 0 \Rightarrow a = 0$

(Por contrapuesta / contrapositiva)
 $\rightarrow$ P.D. $a \neq 0 \Rightarrow |a| \neq 0$

$$\begin{array}{ccc} \boxed{P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P} & & \\ \updownarrow & \text{Contrapuesta de} & \\ \neg P \leftarrow \neg Q & & P \rightarrow Q \end{array}$$

Supongamos que $a \neq 0$. P.D. $|a| \neq 0$

Por tricotomía, como $a \neq 0$, entonces $a > 0$ o $a < 0$

• Si $a > 0 \Rightarrow |a| = a > 0 \Rightarrow |a| \neq 0$

• Si $a < 0 \Rightarrow |a| = -a > 0 \Rightarrow |a| \neq 0$
(porque $a < 0$)

$\therefore |a| \neq 0$ en cualquier caso

$$\left. \begin{array}{l} \therefore a \neq 0 \Rightarrow |a| \neq 0 \\ \therefore |a| = 0 \Rightarrow a = 0 \end{array} \right\} \text{opcional.}$$

2) P.D. $|-a| = |a|$

Caso i) Si $a \geq 0 \Rightarrow -a \leq 0$. En este caso,

$$|-a| = -(-a) = a \quad (\text{porque } -a \leq 0)$$

$$\Rightarrow |-a| = |a|$$

y $|a| = a$ (porque $a \geq 0$)

Caso ii) Si $a \leq 0 \Rightarrow -a \geq 0$. En este caso,

$$|-a| = -a \quad (\text{porque } -a \geq 0)$$

$$\Rightarrow |-a| = |a|$$

y $|a| = -a$ (porque $a \leq 0$)

$\therefore |-a| = |a|$ en cualquier caso.

3) P.D. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

Caso i) Si $a \geq 0$ y $b \geq 0 \Rightarrow ab \geq 0$

$$\Rightarrow |ab| = a \cdot b = |a| \cdot |b|$$

$\uparrow$
 $ab \geq 0$

$\uparrow$
 $a = |a|$
 $b = |b|$ porque $a \geq 0$
 $b \geq 0$

Caso ii) Si $a \geq 0$ y $b \leq 0 \Rightarrow ab \leq 0$, $|a| = a$ y $|b| = -b$

$$\Rightarrow |a \cdot b| = -(a \cdot b) = a(-b) = |a| \cdot |b|$$

$\uparrow$
 $a \cdot b \leq 0$

$\uparrow$
Ejercicio

Caso iii) Si $a \leq 0$ y $b > 0 \Rightarrow ab \leq 0$, $|a| = -a$ y $|b| = b$
 "análogo al caso ii)"

$$\Rightarrow |a \cdot b| = \underset{\substack{\uparrow \\ a \cdot b \leq 0}}{-(a \cdot b)} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ejercicio}}}{(-a) \cdot b} = |a| \cdot |b|$$

Caso iv) Si $a \leq 0$ y $b \leq 0 \Rightarrow ab \geq 0$, $|a| = -a$ y $|b| = -b$

$$\Rightarrow |a \cdot b| = \underset{\substack{\uparrow \\ a \cdot b \geq 0}}{a \cdot b} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ejercicio}}}{(-a) \cdot (-b)} = |a| \cdot |b|$$

$\therefore |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ en cualquier caso

4) Sea $b > 0$.

P.D. $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq \underline{a \leq b}$

$\Rightarrow$] Supongamos que $|a| \leq b$. P.D. $-b \leq a \leq b$ } Opcional

Caso i) Si $a \geq 0 \Rightarrow |a| = a$ y $-a \leq 0$

$$\Rightarrow a = |a| \leq b$$

$$\Rightarrow \underline{a \leq b}$$

$$\Rightarrow -a \leq 0 \leq a \leq b$$

$$\Rightarrow a \leq b \text{ y } -a \leq b$$

$$\Rightarrow a \leq b \text{ y } a \geq -b \text{ (mult. por } -1)$$

$$\Rightarrow -b \leq a \leq b$$

Caso ii) Si $a \leq 0 \Rightarrow |a| = -a$ y $-a \geq 0$

$$\Rightarrow -a = |a| \leq b$$

$$\Rightarrow -a \leq b$$

$$\Rightarrow a \leq 0 \leq -a \leq b$$

$$\Rightarrow a \leq b \text{ y } -a \leq b$$

$$\Rightarrow a \leq b \text{ y } a \geq -b \text{ (mult. por } -1)$$

$$\Rightarrow -b \leq a \leq b$$

$\therefore$ Si $|a| \leq b$, entonces $-b \leq a \leq b$

Idea:

$$\begin{aligned} -a \leq a \leq b \\ a \leq b \\ -a \leq b \end{aligned}$$

$\Leftarrow$] Supongamos que $-b \leq a \leq b$.

P.D, $|a| \leq b$

Como $-b \leq a \leq b \Rightarrow -b \leq a$ y $a \leq b$

$\Rightarrow b \geq -a$ y $a \leq b \Rightarrow \textcircled{1} -a \leq b$ y $\textcircled{2} a \leq b$

Dado que $|a| = a$ o $|a| = -a$, en cualquier caso se tiene que $|a| \leq b$.

otra forma:

Caso i) Si $a \geq 0 \Rightarrow |a| = a \leq b \Rightarrow |a| \leq b$.

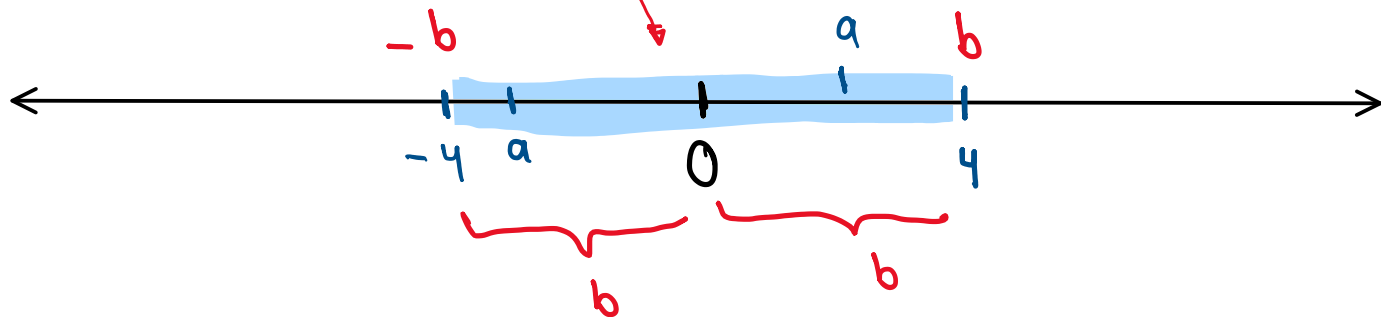
Caso ii) Si $a \leq 0 \Rightarrow |a| = -a \leq b \Rightarrow |a| \leq b$

$\therefore |a| \leq b$ en cualquier caso.

$|a|$ = "distancia" de a a 0

$$|a| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq a \leq 4$$

$|a| \leq b$



5) P.D. $-|a| \leq a \leq |a|$

Tomando $b = |a| \geq 0$ en 4), como $|a| \leq |a|$

$$\Rightarrow -|a| \leq a \leq |a|$$

6) P.D. $|a|^2 = a^2$

Recordemos que $a^2 \geq 0$ para todo $a \in \mathbb{R} \Rightarrow |a^2| = a^2$

def. de valor absoluto

$$\Rightarrow |a|^2 = |a| \cdot |a| = |a \cdot a| = |a^2| = a^2$$

$$\therefore |a|^2 = a^2$$