

- Demostrar que $n^3 + 2n$ es múltiplo de 3 para cada $n \in \mathbb{N}$.

(Por inducción)

(Base $n=1$) Si $n=1$, entonces $n^3 + 2n = 1^3 + 2(1) = 3$ es múltiplo de 3. $\therefore$ La proposición es cierta si $n=1$.

(Paso inductivo)

Sea $k \in \mathbb{N}$ y supongamos que $k^3 + 2k$ es múltiplo de 3, (hipótesis de inducción)
es decir, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$k^3 + 2k = 3m$$

P.D. $(k+1)^3 + 2(k+1)$ es múltiplo de 3, es decir,

P.D. existe $l \in \mathbb{Z}$ t.q. $(k+1)^3 + 2(k+1) = 3l$

$$(k+1)^3 + 2(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2$$

$$= (k^3 + 2k) + 3k^2 + 3k + 3$$

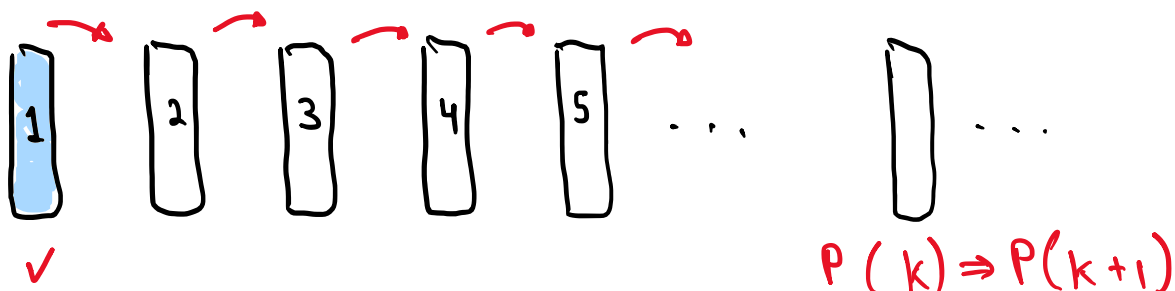
$$= 3m + 3k^2 + 3k + 3 \quad (\text{por hipótesis de inducción})$$

$$= 3(m + k^2 + k + 1)$$

$$= 3l, \quad \text{donde } l = m + k^2 + k + 1 \in \mathbb{Z} \quad (\text{porque } m, k \in \mathbb{Z})$$

$\therefore (k+1)^3 + 2(k+1)$ es múltiplo de 3.

Por el principio de inducción matemática (P.I.M.) concluimos que $n^3 + 2n$ es múltiplo de 3 para toda $n \in \mathbb{N}$



- Demostrar que $1 \leq n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

(Base $n=1$) Como $1 \leq 1$, entonces $1 \leq n$ cuando $n=1$. ✓

(Paso inductivo). Sea $k \in \mathbb{N}$ y supongamos que $1 \leq k$

P.D. $1 \leq k+1$

Sabemos que $0 < 1 \Rightarrow k+0 < k+1 \Rightarrow k < k+1 \Rightarrow 1 \leq k < k+1 \Rightarrow 1 < k+1 \Rightarrow 1 \leq k+1$.

Por el P.I.M. concluimos que $1 \leq n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

- Demostrar que $n \leq 2^n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ (por inducción)

(Base $n=1$)

Como $1 \leq 2 = 2^1 \Rightarrow 1 \leq 2^1$, la desigualdad se cumple para $n=1$.

(Paso inductivo)

Sea $k \in \mathbb{N}$ y supongamos que $k \leq 2^k$ (hipótesis de inducción)

P.D. $k+1 \leq 2^{k+1}$

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{c} +1 \\ \swarrow \\ k+1 \leq 2^k + 1 \end{array} & \begin{array}{c} \cdot 2 \\ \searrow \\ 2k \leq 2 \cdot 2^k \\ 2k \leq 2^{k+1} \end{array}
 \end{array}$$

$$\text{Como } k \leq 2^k \xRightarrow{2 > 0} 2k \leq 2 \cdot 2^k \Rightarrow 2k \leq 2^{k+1}$$

Por otro lado, como $k \in \mathbb{N} \Rightarrow 1 \leq k$

$$\Rightarrow k+1 \leq k+k$$

$$\Rightarrow k+1 \leq 2k \leq 2^{k+1}$$

$$\Rightarrow k+1 \leq 2^{k+1}$$

Idea:

Me gustaría que

$$k+1 \leq 2k \leq 2^{k+1}$$

$$\begin{array}{c}
 \updownarrow \\
 1 \leq k
 \end{array}$$

Por el P.I.M. (Principio de inducción matemática) concluimos que

$n \leq 2^n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Otra demostración:

- Demostrar que $n \leq 2^n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ (por inducción)

(Base $n=1$)

Como $1 \leq 2 = 2^1 \Rightarrow 1 \leq 2^1$, la desigualdad se cumple para $n=1$.

(Paso inductivo)

Sea $k \in \mathbb{N}$ y supongamos que $k \leq 2^k$ (hipótesis de inducción)

P.D. $k+1 \leq 2^{k+1}$

Como $k \leq 2^k \Rightarrow k+1 \leq 2^k + 1$ (*)

Dado que $k \in \mathbb{N} \Rightarrow 1 \leq k \leq 2^k$

$\Rightarrow 1 \leq 2^k$ h.p. de ind.

$$\Rightarrow 2^k + 1 \leq 2^k + 2^k = 2(2^k) = 2^{k+1}$$

$$\Rightarrow 2^k + 1 \leq 2^{k+1}$$

$$\Rightarrow k+1 \leq 2^k + 1 \leq 2^{k+1}$$

$$\Rightarrow k+1 \leq 2^{k+1}$$

Por el P.I.M. concluimos que $n \leq 2^n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Principio de inducción modificado

Sean $A \subset \mathbb{N}$ y $k_0 \in \mathbb{N}$ tales que:

1) $k_0 \in A$

2) Para todo $k \geq k_0$ se cumple que

si $k \in A$, entonces $k+1 \in A$ ($k \in A \Rightarrow k+1 \in A$).

Entonces $\{k \mid k \geq k_0\} \subset A$.

Idea:
Me gustaría que
 $k+1 \leq 2^k + 1 \leq 2^{k+1}$

$$1 \leq k \leq 2^k$$

$$\Rightarrow 1 \leq 2^k$$

$$2^k + 1 \leq 2^k + 2^k = 2(2^k) = 2^{k+1}$$

• Demostrar que $n^2 \leq 2^n$ para toda $n \geq 4$ ($n \in \mathbb{N}$)

(Base $n=4$)

Como $4^2 = 16$ y $2^4 = 16 \Rightarrow 4^2 \leq 2^4$.

$\therefore n^2 \leq 2^n$ si $n=4$

(Paso inductivo)

Sea $k \geq 4$ ($k \in \mathbb{N}$) y supongamos que $k^2 \leq 2^k$ (hip. de ind.)

n	n^2	2^n
1	1	2
2	4	4
3	9	8
4	16	16
5	25	32
6	36	64
7	49	128
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

P.D. $(k+1)^2 \leq 2^{k+1}$

P.D. $k^2 + 2k + 1 \leq 2^{k+1}$

$$k^2 + 2k + 1 \leq 2^k + 2k + 1 \leq 2^{k+1} \quad (?)$$

Como $k^2 \leq 2^k \Rightarrow 2 \cdot k^2 \leq 2 \cdot 2^k \Rightarrow 2k^2 \leq 2^{k+1}$ (*)
mult. por 2 > 0

Dado que $k \in \mathbb{N} \Rightarrow 1 \leq k$

$$\Rightarrow 2k + 1 \leq 2k + k$$

$$\Rightarrow 2k + 1 \leq 3k \quad (**)$$

Por otro lado, sabemos que $4 \leq k$

$$\Rightarrow 3 \leq 4 \leq k \Rightarrow 3 \leq k$$

$$\Rightarrow 3k \leq k \cdot k \quad \left(\begin{array}{l} \text{multiplicando por} \\ k > 0 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow 3k \leq k^2 \quad (***)$$

De (**) y (***) tenemos que

$$2k + 1 \leq 3k \leq k^2 \Rightarrow 2k + 1 \leq k^2$$

$$\Rightarrow k^2 + 2k + 1 \leq k^2 + k^2 = 2k^2 \leq 2^{k+1}$$

$$\Rightarrow k^2 + 2k + 1 \leq 2^{k+1}$$

$$\Rightarrow (k+1)^2 \leq 2^{k+1}$$

Por el P.I.M. concluimos que $n^2 \leq 2^n$ se cumple para cada $n \geq 4$ ($n \in \mathbb{N}$)

Idea

$$k^2 + 2k + 1 \leq 2k^2 \leq 2^{k+1}$$

$$\odot 2k + 1 \leq k^2 \quad \text{P.D.}$$

$$\bullet 1 \leq k \Rightarrow 2k + 1 \leq 2k + k$$

$$\Rightarrow 2k + 1 \leq 3k \leq k^2 \quad (?)$$

$$\bullet \text{ Como } k \geq 4 \Rightarrow 3 \leq 4 \leq k \Rightarrow 3 \leq k$$

$$\Rightarrow 3k \leq k \cdot k \Rightarrow 3k \leq k^2$$



Definición Sea $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Definimos $n!$ (ene Factorial o Factorial de ene) como

$$0! = 1$$

$$n! = n \cdot (n-1)! \quad \text{si } n \in \mathbb{N}$$

Es decir,

$$0! = 1$$

$$1! = 1 \cdot (0!) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$2! = 2 \cdot (1!) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$3! = 3 \cdot (2!) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$4! = 4 \cdot (3!) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$\vdots$$
$$n! = n(n-1)(n-2) \cdots (1)$$

• Demostrar que $n! > 3^{n-2}$ para toda $\underline{n \geq 3}$ ($n \in \mathbb{N}$)

(Base $n=3$)

$$\text{Como } 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \quad \text{y} \quad 3^{3-2} = 3^1 = 3 \Rightarrow 3! > 3^{3-2}$$

$$\therefore n! > 3^{n-2} \quad \text{si } n=3.$$

(Paso inductivo)

Sea $k \geq 3$ ($k \in \mathbb{N}$) y sup. que $k! > 3^{k-2}$ (h. i.)

P.D. $(k+1)! > 3^{(k+1)-2}$

$$\text{Como } k! > 3^{k-2} \xRightarrow{\substack{\text{mult.} \\ \text{por } 3 > 0}} 3 \cdot k! > 3 \cdot 3^{k-2} = 3^{(k-2)+1} = 3^{(k+1)-2}$$

$$\Rightarrow \boxed{3 \cdot k! > 3^{(k+1)-2}} \quad (*)$$

Sabemos que $k \geq 3 \Rightarrow k+1 > k \geq 3$

$$\Rightarrow k+1 > 3$$

$$\Rightarrow \underline{(k+1)(k!)} > 3(k!) \quad \left(\begin{array}{l} \text{mult. por} \\ k! > 0 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \underline{(k+1)!} > 3 \cdot k! > 3^{(k+1)-2}$$

$$\Rightarrow (k+1)! > 3^{(k+1)-2} \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ (x) \end{array}$$

Por el P.I.M. concluimos que $n! \geq 3^{n-2}$ para toda $n \geq 3$ ($n \in \mathbb{N}$)