

Principio de inducción matemática

jueves, 7 de octubre de 2021

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_n = 1 + 2 + \dots + n-1 + n$$

$$S_n = n + n-1 + \dots + 2 + 1$$

$$2S_n = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ veces}}$$

$$2S_n = n(n+1)$$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (*)$$

$$n=1 \quad 1^2 = \frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6} \quad \therefore (*) \text{ se cumple para } n=1$$

$$n=2 \quad 1^2 + 2^2 = 5 = \frac{2(2+1)(2(2)+1)}{6} \quad \therefore (*) \text{ se cumple para } n=2$$

Consideraremos $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

Principio de inducción matemática:

Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que

1) $1 \in A$

2) Para todo $k \in \mathbb{N}$ se cumple que
si $k \in A$, entonces $k+1 \in A$ ($k \in A \Rightarrow k+1 \in A$).

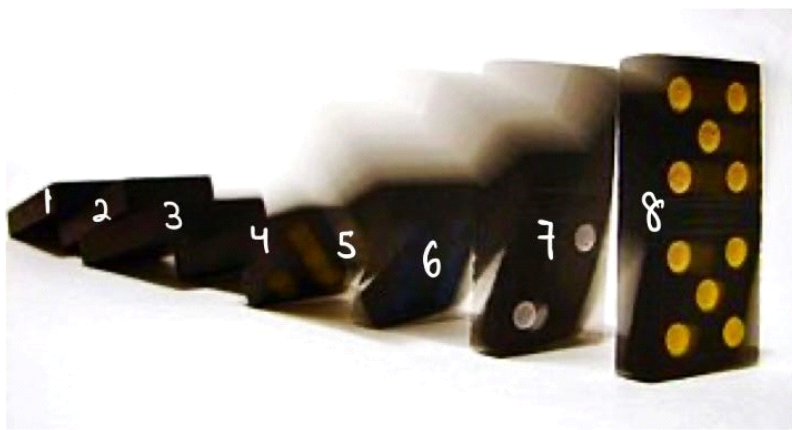
Entonces $A = \mathbb{N}$

$$A = \mathbb{N}$$

$$1 \in A$$

$$\text{Como } 1 \in A \xRightarrow{2)} 2 = 1+1 \in A$$

$$2 \in A \Rightarrow 3 = 2+1 \in A$$



* Sea $P(n)$ una proposición acerca del número natural n
 (Por ejemplo, $P(n): 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$)

Supongamos que:

i) $P(1)$ es verdadera (base de inducción)

ii) Para todo $k \in \mathbb{N}$ se cumple que

si $\underbrace{P(k) \text{ es verdadera}}_{\text{hipótesis de inducción}}$, entonces $P(k+1)$ es verdadera. (paso inductivo)

Entonces, por el principio de inducción matemática, $P(n)$ es verdadera para toda $n \in \mathbb{N}$.

Sea $A = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ es verdadera}\} \subseteq \mathbb{N}$

1) Debido a i) sabemos que $1 \in A$

2) Si $k \in A \Rightarrow P(k) \text{ es verdadera} \Rightarrow P(k+1) \text{ es verdadera}$
 $\Rightarrow k+1 \in A$

$\therefore k \in A \Rightarrow k+1 \in A$

Por el principio de inducción matemática, $A = \mathbb{N}$

Ejemplo:

① Demostrar que

$$(*) \quad 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{para toda } n \in \mathbb{N}$$

(base) * Debemos probar (*) para $n=1$

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

$\therefore (*)$ se cumple para $n=1$.

(Paso inductivo)

Sea $k \in \mathbb{N}$ y supongamos que (*) se cumple para $n=k$, es decir,

$$(**) \quad 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2} \quad (\text{hipótesis de inducción})$$

P.D. (*) se cumple para $n=k+1$, es decir,

$$\text{P.D.} \quad 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+1+1)}{2}$$

Sumando $k+1$ de ambos lados de (**) tenemos que

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)(k+1+1)}{2}$$

$\therefore$ (*) se cumple para $n=k+1$

$\therefore$ (*) se cumple para toda $n \in \mathbb{N}$.

Otra Forma:

$$(1 + 2 + 3 + \dots + k) + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \quad (\text{hipótesis de inducción})$$

$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)(k+1+1)}{2}$$

② Demostrar que para toda $n \in \mathbb{N}$:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (A)$$

(Base) P.D. (A) se cumple para $n=1$

$$1^2 = 1$$

$$\frac{(1)(1+1)(2(1)+1)}{6} = \frac{1(2)(3)}{6} = 1$$

$\therefore 1^2 = \frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6}$, es decir, (A) se cumple para $n=1$

$n=1$ ✓
 $n=2$
 $n=3$
 $n=4$
 $\vdots$
 $\vdots$

(Paso inductivo) Sup. que (a) se cumple para $n=k$:

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

(h.i.)

hipótesis de inducción

P.D. (a) se cumple para $n=k+1$

$$P.D. \quad 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+1+1)(2(k+1)+1)}{6}$$

$$P.D. \quad 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \quad (\text{por h.i.})$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6}$$

$$= \frac{(k+1)[2k^2 + k + 6k + 6]}{6}$$

$$= \frac{(k+1)[2k^2 + 7k + 6]}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$\therefore$ (a) es verdadera para $n=k+1$

$\therefore$ (a) se cumple para toda $n \in \mathbb{N}$

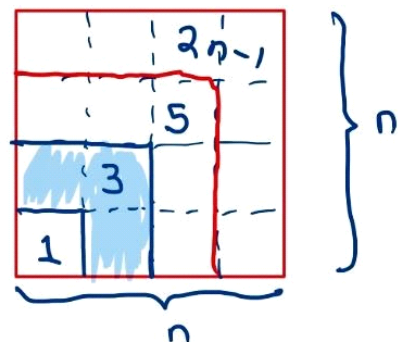
③ Encontrar una fórmula para calcular $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$ y demostrarla por inducción.

$$n=1 \quad 1 = 1 = 1^2$$

$$n=2 \quad 1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$n=3 \quad 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

$$n=4 \quad 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$



$$1 + 3 + 5 + \dots + \underbrace{(2n-1)}_1 = n^2 \quad (\square)$$

• (Base) $n=1$

$$\left. \begin{array}{l} 2(1)-1 = 1 \\ 1^2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(1)-1 = 1^2$$

$\therefore (\square)$ se cumple para $n=1$

• (Paso inductivo)

Sup. que $(\square)$ se cumple para $n=k$:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) = k^2 \quad (\text{h.i.})$$

P.D. $(\square)$ se cumple para $n=k+1$

$$\text{P.D. } 1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) + (2(k+1)-1) = (k+1)^2$$

$$\begin{aligned} \underline{1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1)} + (2(k+1)-1) &= \underline{k^2} + (2(k+1)-1) \quad (\text{por hip. ind.}) \\ &= k^2 + (2k+2-1) \\ &= k^2 + 2k+1 \\ &= (k+1)^2 \end{aligned}$$

$\therefore (\square)$ se cumple para $n=k+1$

$\therefore (\square)$ se cumple para toda $n \in \mathbb{N}$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1) = (n+1)^2$$

$$n=1 \quad 1+3 = 4 = 2^2$$

$$n=2 \quad 1+3+5 = 9 = 3^2$$

Definición Si $a \in \mathbb{R}$, definimos

$$\bullet a^1 = a$$

$$\bullet a^{n+1} = a \cdot a^n \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N} \quad (\text{definición recursiva})$$

Teorema Si $a \in \mathbb{R}$, entonces para cada $n, m \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$1) a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad n \in \mathbb{N} \quad m \in \mathbb{N}$$

$$2) (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Demostración

1) Sea $a \in \mathbb{R}$ y consideremos $m \in \mathbb{N}$ (cualquiera, pero fijo).

Demostraremos por inducción sobre n que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad (*)$$

(base $n=1$)

$$a^1 \cdot a^m \underset{\text{def}}{=} a \cdot a^m \underset{\text{def}}{=} a^{m+1} = a^{1+m} \Rightarrow a^1 \cdot a^m = a^{1+m}$$

$\therefore (*)$ se cumple para $n=1$

(paso inductivo)

Sup. que $(*)$ se cumple para $n=k$, es decir,

$$a^k \cdot a^m = a^{k+m} \quad \text{h. i.}$$

P.D. $(*)$ se cumple para $n=k+1$

$$\text{P.D. } a^{k+1} \cdot a^m = a^{(k+1)+m}$$

$$\begin{aligned} a^{k+1} \cdot a^m &\underset{\text{def}}{=} (a \cdot a^k) \cdot a^m = a \cdot (a^k \cdot a^m) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{hip.} \\ \text{ind.}}}{=} a \cdot a^{k+m} \underset{\text{def.}}{=} a^{k+m+1} \\ &= a^{(k+1)+m} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a^{k+1} \cdot a^m = a^{(k+1)+m}$$

$\therefore (*)$ se cumple para $n=k+1$

$\therefore (*)$ se cumple para toda $n \in \mathbb{N}$

2) Ejercicio