

Desigualdades y valor absoluto

miércoles, 6 de octubre de 2021

Ejemplo. Determina el conjunto

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{2x+1}{x+2} < 1 \quad \text{y} \quad x \neq -2 \right\}$$

Sol. $x \in C \iff \frac{2x+1}{x+2} < 1$

Como $x \neq -2$ entonces $x+2 \neq 0$, pero no sabemos si

$$x+2 > 0 \quad \text{o} \quad x+2 < 0,$$

así que nos ayuda multiplicar la desigualdad por $x+2$.

$$\Rightarrow \frac{2x+1}{x+2} < 1 \iff \frac{2x+1}{x+2} - 1 < 1-1 = 0$$

$$\iff \frac{2x+1}{x+2} - \frac{x+2}{x+2} < 0 \quad a \neq 0 \Rightarrow a^{-1} \neq 0$$

$$\iff [(2x+1) - (x+2)] \cdot \frac{1}{x+2} < 0$$

$$\iff (x-1) \cdot \frac{1}{x+2} < 0$$

$$ab < 0$$
$$\Rightarrow a > 0 \text{ y } b < 0, \text{ o}$$
$$a < 0 \text{ y } b > 0$$

$$\iff \begin{array}{l} 1) \ x-1 < 0 \text{ y } \frac{1}{x+2} > 0, \text{ o bien} \\ 2) \ x-1 > 0 \text{ y } \frac{1}{x+2} < 0 \end{array}$$

Caso 1) $x-1 < 0 \text{ y } \frac{1}{x+2} > 0$

$$\left(\frac{1}{a} = a^{-1} > 0 \Rightarrow a = (a^{-1})^{-1} > 0 \right)$$

$$\Rightarrow x-1 < 0 \text{ y } x+2 > 0$$

$$\iff x < 1 \text{ y } x > -2$$

$$\iff -2 < x < 1$$

Caso 2) $x-1 > 0 \text{ y } \frac{1}{x+2} < 0$

$$\Rightarrow x-1 > 0 \text{ y } x+2 < 0$$

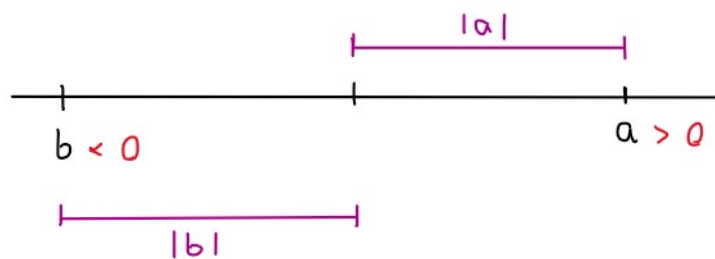
$$\iff x > 1 \text{ y } x < -2$$

No existe $x \in \mathbb{R}$ que satisfaga ambas desigualdades

$$\therefore C = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\}$$

Definición. Si $a \in \mathbb{R}$, definimos el valor absoluto de a , denotado por $|a|$, como

$$|a| := \begin{cases} a & \text{si } a > 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$



Notemos que $|a| \geq 0$ para cualquier $a \in \mathbb{R}$.

Ejemplos.

1) $|7| = 7$ pues $7 > 0$.

2) $|-3| = -(-3) = 3$ pues $-3 < 0$.

3) $|(-2)^2|$

Recordemos que $b^2 \geq 0$ para cualquier $b \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow (-2)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow |(-2)^2| = (-2)^2 = (-2)(-2) = (-1)(-1) \cdot 2 \cdot 2 = 4$$

$$\therefore |(-2)^2| = (-2)^2 = 4$$

Ejemplo. Resuelve la ecuación $|x-2| = 7$

Sal. No pasa que $x-2=0$, de lo contrario

$$7 = |x-2| \stackrel{\text{def}}{=} 0 \quad ?$$

Caso 1. $x-2 > 0 \Rightarrow |x-2| = x-2$

$$\Rightarrow x - 2 = 7$$

$$\Rightarrow x - 2 + 2 = 7 + 2$$

$$\Rightarrow x = 9$$

$$(|9 - 2| = |7| = 7)$$

$$\text{Caso 2. } x - 2 < 0 \Rightarrow |x - 2| = -(x - 2)$$

$$\Rightarrow -(x - 2) = 7$$

$$\Rightarrow -x + 2 = 7$$

$$\Rightarrow -x = 7 - 2 = 5$$

$$\Rightarrow x = -5$$

$$(|(-5) - 2| = |-7| = -(-7) = 7)$$

$\therefore -5$ y 7 son soluciones a la ecuación.

Ejemplo. Resuelve la ecuación $|2x - 3| = -|-8|$

Sol. Sabemos que $8 > 0$ ($8 \in \mathbb{N}$)

$$\Rightarrow -8 < 0$$

$$\Rightarrow |-8| = -(-8) = 8$$

$$\Rightarrow |2x - 3| = -8$$

$$\text{Caso 1. } 2x - 3 > 0 \Rightarrow |2x - 3| = 2x - 3$$

$$\Rightarrow 2x - 3 = -8$$

$$\Rightarrow 2x = -5$$

$$\Rightarrow x = -\frac{5}{2}$$

$$(-8 = |2(-\frac{5}{2}) - 3| = |-5 - 3| = |-8| = 8 \quad \heartsuit)$$

No existe $x \in \mathbb{R}$ que satisfaga $|2x - 3| = -8$

pues $|2x - 3| \geq 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$

$\therefore$ La ecuación no tiene solución.

Ejemplo. Resuelve la ecuación $|x-3|+5=10$

Sol. Sabemos que $|x-3| \geq 0$ y $5 > 0$ pues $5 \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow |x-3|+5 > 0$$

$$\Rightarrow ||x-3|+5| = |x-3|+5$$

$$\Rightarrow |x-3|+5 = 10$$

$$\Rightarrow |x-3| = 5$$

Caso 1. $x-3 > 0 \Rightarrow |x-3| = x-3$

$$\Rightarrow x-3 = 5$$

$$\Rightarrow x = 5+3 = 8$$

$$(||8-3|+5| = |5|+5 = |5+5| = |10| = 10)$$

Caso 2. $x-3 < 0 \Rightarrow |x-3| = -(x-3)$

$$\Rightarrow -(x-3) = 5$$

$$\Rightarrow -x+3 = 5$$

$$\Rightarrow -x = 2$$

$$\Rightarrow x = -2$$

$$(||(-2)-3|+5| = |-5|+5 = |5+5| = |10| = 10)$$

$\therefore -2$ y 8 son soluciones de la ecuación.

Ejemplo. Resuelve la desigualdad $|x+4| < 7$

Sol. Caso 1. $x+4 > 0 \Rightarrow |x+4| = x+4$

$$\Rightarrow x+4 < 7$$

$$\Rightarrow x+4-4 < 7-4$$

$$\Rightarrow x < 3$$

Caso 2. $x+4 < 0 \Rightarrow |x+4| = -(x+4)$

$$\Rightarrow -(x+4) < 7$$

$$\Rightarrow -(x+4)(-1) > 7(-1)$$

$$\Rightarrow x+4 > -7$$

$$a < b \text{ y } c < 0$$

$$\Rightarrow ca > cb$$

$$\Rightarrow (x+4)(-1) > -7(-1)$$

$$\Rightarrow ca > cb$$

$$\Rightarrow x+4 > -7$$

$$\Rightarrow x+4-4 > -7-4$$

$$\Rightarrow x > -11$$

$$\Rightarrow -11 < x < 3$$

Notemos que si $x+4=0 \Rightarrow x=-4$ y $-11 < -4 < 3$

$\therefore$ Las elementos del conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid -11 < x < 3\}$ son todas las que satisfacen la desigualdad.

Teorema. Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $b > 0$, entonces $|a| < b$ si y solo si $-b < a < b$.

Ejemplo. Resuelve la desigualdad $|2x-3| < 5$

Sol. Como $5 > 0$, podemos aplicar el teorema anterior, es decir,

$$|2x-3| < 5 \Leftrightarrow -5 < 2x-3 < 5$$

$$\Leftrightarrow -5+3 < 2x-3+3 < 5+3$$

$$\Leftrightarrow -2 < 2x < 8 \quad \frac{1}{2} > 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \cdot \frac{1}{2} < (2x) \cdot \frac{1}{2} < 8 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -1 < x < 4$$

$\therefore$ Los elementos del conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 4\}$ son todas las números que satisfacen la desigualdad.

Resolviendo $|2x-3| < 5$ por casos:

Caso 1. $2x-3 > 0 \Rightarrow |2x-3| = 2x-3$

$$\Rightarrow 2x-3 < 5$$

$$\Rightarrow \underline{x < 4}$$

Caso 2. $2x-3 < 0 \Rightarrow |2x-3| = -(2x-3)$

$$\Rightarrow -(2x - 3) < 5$$

$$\Rightarrow 2x - 3 > -5$$

$$\Rightarrow \underline{x > -1}$$

$$\therefore \underline{-1 < x < 4}$$