

Propiedades del orden de $\mathbb{R}$ (segunda parte)

martes, 5 de octubre de 2021

Teorema. Si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $a - \varepsilon < b$ para cada $\varepsilon > 0$, entonces $a \leq b$.

Dem. Supongamos por contradicción que $a > b$ (tricotomía).
Sea $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}(a-b)$. Como $a > b$, $a-b > 0$ y así

$$a-b > \varepsilon_0 > 0$$

$$b > 0 \Rightarrow b > \frac{b}{2} > 0$$

por un corolario anterior. Luego

$$\begin{aligned} a - \varepsilon_0 &= \frac{1}{2}(2a) - \frac{1}{2}(a-b) \\ &= \frac{1}{2}(2a - (a-b)) \\ &= \frac{1}{2}(a-b). \end{aligned}$$

Por otro lado, como $a > b$

$$\Rightarrow a+b > b+b = 2b,$$

pero $2 > 0$, por lo que $\frac{1}{2} > 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(a+b) > \frac{1}{2}(2b) = b$$

$$\Rightarrow a - \varepsilon_0 = \frac{1}{2}(a-b) \quad \gamma \quad \frac{1}{2}(a-b) > b$$

$$a - \varepsilon_0 > b \quad \blacktriangledown$$

$$\therefore a \leq b \quad \blacksquare$$

Teorema. Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $ab > 0$, entonces:

- 1) $a > 0$ y $b > 0$, o bien
- 2) $a < 0$ y $b < 0$.

Dem. Observemos que $a \neq 0$ y $b \neq 0$ (si $a=0$ o $b=0 \Rightarrow ab=0$).

Por tricotomía pasa que $a > 0$ o $a < 0$.

- 1) Si $a > 0$, entonces $\frac{1}{a} > 0$ y así
-

... para demostrar que $a < b$ o $a > b$.

1) Si $a > 0$, entonces $\frac{1}{a} > 0$ y así

$$b = \frac{1}{a} \cdot (ab) > \frac{1}{a} \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow b > 0$$

$$\begin{array}{l} a > b \wedge c > 0 \\ \Rightarrow ca > cb \end{array}$$

2) Si $a < 0$, entonces $\frac{1}{a} < 0$ y así

$$b = \frac{1}{a} \cdot (ab) < \frac{1}{a} \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow b < 0$$

$$\begin{array}{l} a > b \wedge c < 0 \\ \Rightarrow ca < cb \end{array}$$

Corolario. Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $ab < 0$, entonces:

1) $a > 0$ y $b < 0$, o bien

2) $a < 0$ y $b > 0$.

Dem. Tarea $\square$

Teorema. No existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r^2 = 2$.

Dem. Supongamos por contradicción que existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r^2 = 2$.

Ya que $r \in \mathbb{Q}$, existen $p, q \in \mathbb{Z}$ con $q \neq 0$ tales que

$$r = \frac{p}{q},$$

y podemos suponer que p y q no tienen factores comunes enteros distintas de 1, es decir, $\frac{p}{q}$ es irreducible.

$$\Rightarrow 2 = r^2 = \frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q} = \frac{p \cdot p}{q \cdot q} = \frac{p^2}{q^2},$$

y notamos que $q^2 \neq 0$ pues $q \neq 0$

$$\Rightarrow 2q^2 = \frac{p^2}{q^2} \cdot q^2 = p^2$$

$$\Rightarrow 2q^2 = p^2,$$

esto es, p^2 es un número par.

Si p fuera impar, existiría $k \in \mathbb{N}$ t. q. $p = 2k + 1$. Así,

$$p^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \text{ sería impar.}$$

Entonces $p > 0$ es par, por lo que existe $n \in \mathbb{N}$ t. q. $p = 2n$

$$\Rightarrow 2q^2 = (2n)^2 = (2n)(2n) = 2(2n^2), \text{ y } 2 > 0$$

$$\Rightarrow q^2 = 2n^2$$

Es decir, q^2 es un número impar, por lo que también lo es q

$$\Rightarrow q = 2m \text{ para alguna } m \in \mathbb{N}$$

De esta manera, 2 es factor común de p y q ,

o bien $\frac{p}{q}$ se puede reducir a $\frac{n}{m}$!

$$\therefore \text{ No existe } r \in \mathbb{Q} \text{ t. q. } r^2 = 2 \quad \square$$

Teorema. Si $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y $r \in \mathbb{Q}$, entonces $a + r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Dem. Supongamos por contradicción que $a + r \in \mathbb{Q}$, es decir, existen $p, q \in \mathbb{Z}$ con $q \neq 0$ tales que

$$a + r = \frac{p}{q}.$$

Ya que $r \in \mathbb{Q}$, existen $s, t \in \mathbb{Z}$ con $t \neq 0$ tales que

$$r = \frac{s}{t}$$

$$\Rightarrow a + \frac{s}{t} = \frac{p}{q}$$

$$\Rightarrow a = \frac{p}{q} - \frac{s}{t} = \frac{p}{q} + \frac{(-s)}{t} = \frac{pt - qs}{qt}$$

Dado que $p, q, s, t \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ y $t \neq 0$, se sigue que

$$\underline{pt - qs, qt \in \mathbb{Z} \text{ y } qt \neq 0}$$

$$\Rightarrow a = \frac{pt - qs}{qt} \in \mathbb{Q} \quad \nabla$$

$$\therefore a + r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad \square$$

$$m, n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow m + n, mn \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore a + r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

Desigualdades

Ejemplo. Determina el conjunto A de todas las $x \in \mathbb{R}$ tales que $2x + 3 \leq 6$

$$\begin{aligned} \text{Sol. } x \in A &\iff 2x + 3 \leq 6 \\ &\iff 2x + 3 - 3 \leq 6 - 3 & \left(\begin{array}{l} a > b \Rightarrow a + c > b + c \\ a = b \Rightarrow a + c = b + c \end{array} \right) \\ &\iff 2x \leq 3 \\ &\iff \frac{1}{2}(2x) \leq \frac{1}{2} \cdot 3 & (a > b \wedge c > 0 \Rightarrow ca > cb) \\ &\iff x \leq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{3}{2}\}.$$

Ejemplo. Determinar el conjunto $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x > 2\}$

$$\begin{aligned} \text{Sol. } x \in B &\iff x^2 + x > 2 \\ &\iff x^2 + x - 2 > 2 - 2 \\ &\iff x^2 + x - 2 > 0 \\ &\iff (x-1)(x+2) > 0 & ab > 0 \Rightarrow \begin{array}{l} 1) a > 0, b > 0 \\ 2) a < 0, b < 0 \end{array} \\ &\Rightarrow \begin{array}{l} 1) x-1 > 0 \quad \vee \quad x+2 > 0 \\ 2) x-1 < 0 \quad \vee \quad x+2 < 0 \end{array} \\ &\Rightarrow \begin{array}{l} 1) x > 1 \quad \vee \quad x > -2 \\ 2) x < 1 \quad \vee \quad x < -2 \end{array} & \begin{array}{l} x > 1 > 0 > -2 \Rightarrow x > -2 \\ x < -2 < 0 < 1 \Rightarrow x < 1 \end{array} \\ &\Rightarrow 1) x > 1 \quad \circ \quad 2) x < -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore B &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1 \vee x < -2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}. \end{aligned}$$