

Propiedades del orden de $\mathbb{R}$

lunes, 4 de octubre de 2021

Teorema. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$.

- 1) Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$ (transitividad de $>$)
- 2) Se cumple exactamente una de las siguientes afirmaciones:
 $a > b$, $a = b$ o $a < b$ (tricotomía)
- 3) Si $a \geq b$ y $b \geq a$, entonces $a = b$.

Dem 3) Supongamos por contradicción que $a \neq b$.

Por (2) pasa que $a > b$ o $a < b$.

Si $a > b$, por hipótesis también sabemos que $b \geq a$
 $\Rightarrow a > b$ y $b > a$ $\nexists$ (2)

Si $a < b$, también sabemos que $a \geq b$
 $\Rightarrow a < b$ y $a > b$ $\nexists$ (2)
 $\therefore a = b$ $\square$

Teorema.

- 1) Si $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$ entonces $a^2 > 0$.
- 2) $1 > 0$.
- 3) Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $n > 0$.

Dem 1) Como $a \neq 0$, por tricotomía $a \in P$ o $-a \in P$.

$$\begin{aligned} \text{Si } a \in P &\Rightarrow a^2 = a \cdot a \in P \\ &\Rightarrow a^2 > 0 \end{aligned}$$

$$\text{Si } -a \in P \Rightarrow (-a) \cdot (-a) \in P \quad \text{ } (-1)(-1) = -(-1) = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Pero } (-a)(-a) &= [(-1)a][(-1)a] = a^2 \\ &\Rightarrow a^2 > 0 \end{aligned}$$

- 2) Ya que $1 \neq 0$, del inciso anterior se sigue que
 $1 = 1 \cdot 1 = 1^2 > 0$.
- 3) Pendiente $\square$

Teorema. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

- 1) Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$
- 2) Si $a > b$ y $c > d$ entonces $a + c > b + d$
- 3) Si $a > b$ y $c > 0$ entonces $ca > cb$.
Si $a > b$ y $c < 0$ entonces $ca < cb$.
- 4) Si $a > 0$, entonces $a^{-1} > 0$
Si $a < 0$, entonces $a^{-1} < 0$.

Dem 1) $a > b \Rightarrow a - b \in \mathbb{P}$ (def.)
 $\Rightarrow (a + c) - (b + c) = (a - b) + \cancel{(c - c)} = a - b \in \mathbb{P}$
 $\Rightarrow a + c > b + c$ (def.)

2) $a > b$ y $c > d \Rightarrow a - b, c - d \in \mathbb{P}$ (def.)
 $\Rightarrow (a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d) \in \mathbb{P}$ (axioma P)
 $\Rightarrow a + c > b + d$ (def.)

3) $a > b$ y $c > 0 \Rightarrow a - b, c \in \mathbb{P}$ (def.)
 $\Rightarrow ca - cb = c \cdot (a - b) \in \mathbb{P}$ (axioma P)
 $\Rightarrow ca > cb$ (def.)

$a > b$ y $c < 0 \Rightarrow a - b, -c \in \mathbb{P}$ (def.)
 $\Rightarrow cb - ca = (-c)(a - b) \in \mathbb{P}$ (axioma P)
 $\Rightarrow cb > ca$ (def.)

4) Si $a > 0$, entonces $a \neq 0$ y existe $a^{-1} \neq 0$.

Por tricotomía, $a^{-1} > 0$ o $a^{-1} < 0$

Supongamos que $a^{-1} < 0$. Como $a > 0$, al hacer $b = 0$, $c = a^{-1}$ y aplicando el inciso (3) para que

$$1 = a^{-1} \cdot a < a^{-1} \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow 1 < 0 \quad \nabla$$

$$\therefore a^{-1} > 0.$$

Caso $a < 0$, tarea. ■

Notemos que si $\frac{m}{n} \in \mathbb{R}$ con $m, n \in \mathbb{N}$, entonces $m > 0$, $n > 0$, $\frac{1}{n} > 0$
y así $\frac{m}{n} = m \cdot \frac{1}{n} > 0$.

Definición. Llamamos el conjunto de las números racionales a

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0 \right\}.$$

Definimos el conjunto de las números irracionales como

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} := \{ x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Q} \}.$$

Es decir, los irracionales son números reales que no se pueden expresar como el cociente de dos enteros.

Teorema. Si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $a < b$, entonces

$$a < \frac{a+b}{2} < b.$$

$$a < b < c := a < b \wedge b < c$$

Dem. Ya que $a < b$, se sigue de un teorema anterior que

$$\begin{aligned} a+a &< a+b & \text{y} & & a+b < b+b \\ \Rightarrow 2a &< a+b & \text{y} & & a+b < 2b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &> b \\ \Rightarrow a+c &> b+c \end{aligned}$$

Dado que $2 \in \mathbb{N}$, $2 > 0$ y así $\frac{1}{2} > 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(2a) < \frac{1}{2}(a+b) \quad \text{y} \quad \frac{1}{2}(a+b) < \frac{1}{2}(2b)$$

$$\Rightarrow a < \frac{a+b}{2} \quad \text{y} \quad \frac{a+b}{2} < b$$

$$\therefore a < \frac{a+b}{2} < b \quad \square$$

Corolario. Si $b \in \mathbb{R}$ y $b > 0$, entonces $0 < \frac{b}{2} < b$.

Dem. Hacemos $a=0$ y aplicamos el teorema anterior $\square$

Teorema. Si $a \in \mathbb{R}$ es tal que $0 \leq a < \varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$, entonces $a = 0$.

Dem. Por contrapositiva, supongamos que $a \neq 0$.

$\Rightarrow a < 0$ o $a > 0$. (tricotomía)

Si $a < 0$, es falso que $0 \leq a < \varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$.

Si $a > 0$, entonces $0 < \frac{a}{2} < a$ por el corolario.

Haciendo $\varepsilon_0 = \frac{a}{2} > 0$, pasa que $0 < \varepsilon_0 < a$. Es decir,

es falso que $0 \leq a < \varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$

$\therefore$ Si $0 \leq a < \varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$, entonces $a = 0$. ■