

Teorema. Sean $a, b \in \mathbb{R}$.

1) Si $a \neq 0$, entonces $a^{-1} \neq 0$ y $(a^{-1})^{-1} = a$

2) Si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.

Demostración.

2) Sup. que $a \cdot b = 0$. P.D. $a = 0$ o $b = 0$

Caso 1) Si $a = 0$, entonces se cumple que $a = 0$ o $b = 0$. ✓

Caso 2) Si $a \neq 0 \Rightarrow$ existe $a^{-1} \in \mathbb{R}$ t.q. $a^{-1} \cdot a = 1$

Como $a \cdot b = 0$

$$\Rightarrow a^{-1} (a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0 \quad (\text{inv. } \cdot)$$

$$\Rightarrow (a^{-1} \cdot a) \cdot b = 0 \quad (\text{asoc. } \cdot \text{ y } \nearrow \text{teo. anterior } q \cdot 0 = 0)$$

$$\Rightarrow 1 \cdot b = 0 \quad (\text{inv. } \cdot)$$

$$\Rightarrow \boxed{b = 0} \quad (\text{neutro } \cdot)$$

$$\therefore a = 0 \text{ o } b = 0$$

* Una manera de demostrar una disyunción $P \vee Q$, es suponer que una de las proposiciones no se cumple (suponemos $\neg P$) y demostrar la otra proposición (Q).

Otra forma de demostrar 2):

Supongamos que $a \cdot b = 0$ y $a \neq 0$. P.D. $b = 0$

Dado que $a \neq 0 \Rightarrow$ existe $a^{-1} \in \mathbb{R}$ t.q. $a^{-1} \cdot a = 1$

Como $a \cdot b = 0$

$$\Rightarrow a^{-1} (a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0 \quad (\text{inv. } \cdot)$$

$$\Rightarrow (a^{-1} \cdot a) \cdot b = 0 \quad (\text{asoc. } \cdot \text{ y } \nearrow \text{teo. anterior } q \cdot 0 = 0)$$

$$\Rightarrow 1 \cdot b = 0 \quad (\text{inv. } \cdot)$$

$$\Rightarrow \boxed{b = 0} \quad (\text{neutro } \cdot)$$

$$\therefore a = 0 \text{ o } b = 0$$

Teorema Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces:

- 1) $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$
- 2) $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$
- 3) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$
- 4) $\frac{1}{-a} = -\frac{1}{a}$ si $a \neq 0$ $\left((-a)^{-1} = -a^{-1} \right)$
- 5) $\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ si $b \neq 0$
- 6) $\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$ si $b \neq 0$
- 7) $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$ si $b \neq 0$
- 8) $\frac{1}{a \cdot b} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$ si $a, b \neq 0$

Demostración.

1) P.D. $(a \cdot b) + (-a) \cdot b = 0$

$$\begin{aligned} (a \cdot b) + ((-a) \cdot b) &= (a + (-a)) \cdot b && \text{(Dist.)} \\ &= 0 \cdot b && \text{(inv. +)} \\ &= 0 && \text{(} a \cdot 0 = 0 \text{ y conmut.)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (a \cdot b) + ((-a) \cdot b) = 0$$

$$\therefore (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$$

2) y 3) Ejercicio.

Def. $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$ si $b \neq 0$.

Observación $\frac{1}{b} = 1 \cdot b^{-1} = b^{-1} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{b} = b^{-1}}$ si $b \neq 0$

4) P.D. $\frac{1}{-a} = -\frac{1}{a}$

Demostremos que $(-a)^{-1} = -a^{-1}$ (P.D. el inverso multiplicativo de $-a$ es $-a^{-1}$)
 P.D. $(-a) \cdot (-a^{-1}) = 1$

$$(-a) \cdot (-a^{-1}) = a \cdot a^{-1} = 1$$

↑ 3) de este teorema $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$
↑ inverso mult.

$\Rightarrow (-a) \cdot (-a^{-1}) = 1 \leftarrow -a^{-1}$ es inverso mult. de $-a$

$\Rightarrow \boxed{-a^{-1} = (-a)^{-1}}$

5), 6) Ejercicio.

7) P.D. $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$

$$\frac{-a}{-b} \underset{\text{de F}}{\uparrow} = (-a) \cdot \underbrace{(-b)^{-1}}_{\text{4)} \uparrow} = (-a) \cdot \underbrace{-(b^{-1})}_{\text{3)} \uparrow} = a \cdot (b^{-1}) \underset{\text{de F}}{\uparrow} = \frac{a}{b}$$

$$\therefore \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

8) P.D. $\frac{1}{a \cdot b} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$

P.D. $\underbrace{(a \cdot b)^{-1}}_{\text{inverso multiplicativo de } a \cdot b} = \underbrace{(a^{-1}) \cdot (b^{-1})}_{\text{4)}}$

(P.D. $(a \cdot b) \cdot (a^{-1} \cdot b^{-1}) = 1$)

$$\begin{aligned}
(\underline{a \cdot b}) \cdot (\underline{a^{-1}} \cdot \underline{b^{-1}}) &= ((\underline{a \cdot b}) \cdot \underline{a^{-1}}) \cdot \underline{b^{-1}} && (\text{asoc. } \cdot) \\
&= ((b \cdot a) \cdot a^{-1}) \cdot b^{-1} && (\text{comm. } \cdot) \\
&= (b \cdot (a \cdot a^{-1})) \cdot b^{-1} && (\text{asoc. } \cdot) \\
&= (b \cdot 1) \cdot b^{-1} && (\text{inv. } \cdot) \\
&= b \cdot b^{-1} && (\text{nev. } \cdot) \\
&= 1 && (\text{inv. } \cdot)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{(a \cdot b)} \cdot \underline{(a^{-1} \cdot b^{-1})} = 1$$

$$\therefore a^{-1} \cdot b^{-1} = (a \cdot b)^{-1}$$

Nota: A partir de ahora, utilizaremos todas las propiedades que conocemos de $+$, $-$, $\cdot$ y $\frac{a}{b}$ sin hacer referencia a axiomas y teoremas escritos previamente.

Axiomas de orden en $\mathbb{R}$

Existe un subconjunto no vacío P de $\mathbb{R}$, llamado el **conjunto de números reales positivos**, que satisface las siguientes propiedades:

- O i) Si $a, b \in P$, entonces $a + b \in P$ (la suma de dos números positivos es un número positivo)
- O ii) si $a, b \in P$, entonces $ab \in P$ (la multipl. de dos números positivos es un número positivo)
- O iii) si $a \in \mathbb{R}$, entonces se cumple exactamente una de las siguientes

afirmaciones:

$$a \in P, \quad a = 0, \quad -a \in P \quad (\text{tricotomía})$$

Definición

- Si $a \in P$, se dice que a es un número real positivo y se escribe $a > 0$.
- Si $a \in P \cup \{0\}$, se dice que a es un número real no negativo y se escribe $a \geq 0$.
- Si $-a \in P$, se dice que a es un número real negativo y se escribe $a < 0$.
- Si $-a \in P \cup \{0\}$, se dice que a es un número real no positivo y se escribe $a \leq 0$.

Definición. Sean $a, b \in \mathbb{R}$

- Si $a - b \in P$, entonces se escribe $a > b$ o $b < a$.
- Si $a - b \in P \cup \{0\}$, entonces se escribe $a \geq b$ o $b \leq a$.

Escribiremos $a < b < c$ para indicar que se satisface que $a < b$ y $b < c$.

Teorema. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$

- 1) Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$ (transitividad de $>$)
- 2) Se cumple exactamente una de las siguientes afirmaciones:
 $a > b$, $a = b$, $a < b$ (tricotomía)
- 3) Si $a \geq b$ y $b \geq a$, entonces $a = b$.

Demostración.

- 1) Supongamos que $a > b$ y $b > c$. (P.D. $a > c$, es decir, $a - c \in P$)
Como $a > b$ y $b > c \Rightarrow a - b \in P$ y $b - c \in P$ (de F.)
 $\Rightarrow a - c = (a - b) + (b - c) \in P$ (axioma 0 i)
 $\Rightarrow a - c \in P$
 $\Rightarrow a > c$ (de F.)

2) Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Como $a - b \in \mathbb{R}$, entonces por el axioma Oiii) se cumple exactamente una de la sig. proposiciones

$$a - b \in P$$

$$a - b = 0$$

$$b - a = -(a - b) \in P$$

$$\bullet S_1 \quad a - b \in P \stackrel{\text{def}}{\iff} a > b$$

$$\bullet S_1 \quad a - b = 0 \iff a = b$$

$$\bullet S_1 \quad b - a \in P \stackrel{\text{def}}{\iff} b > a \quad (a < b)$$

Entonces se cumple exactamente una de las siguientes proposiciones;

$$a > b, \quad a = b, \quad a < b$$