

Propiedades de $\mathbb{R}$

jueves, 30 de septiembre de 2021

Teorema. Si $a \in \mathbb{R}$, entonces:

- 1) $a \cdot 0 = 0$;
- 2) $(-1) \cdot a = -a$;
- 3) $-(-a) = a$;
- 4) $(-1) \cdot (-1) = 1$.

Dem 2) Sabemos que $a + (-a) = 0$ y $-a$ es único con esta propiedad.

$$\text{P.D. } a + (-1) \cdot a = 0$$

$$\begin{aligned} a + (-1) \cdot a &= 1 \cdot a + (-1) \cdot a && (\text{neutro } \cdot) \\ &= (1 + (-1)) \cdot a && (\text{distribución}) \\ &= 0 \cdot a && (\text{inverso } +) \\ &= 0 && (\text{inciso 1}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a + (-1) \cdot a = 0$$

Esto es, $(-1) \cdot a$ es el inverso aditivo de a

$$\therefore (-1) \cdot a = -a \quad (\text{unicidad del inv. } +)$$

3) Por definición $-(-a)$ es el inverso aditivo de $-a$, pero

$$(-a) + a = 0,$$

es decir, a es el inverso aditivo de $-a$

$$\Rightarrow -(-a) = a \quad (\text{unicidad del inv. } +)$$

4) Haciendo $a = -1$, pasa que

$$(-1) \cdot (-1) = (-1) \cdot a = -a = -(-1) \quad (\text{inciso (2)})$$

Pero el inciso (3) nos dice que $-(-1) = 1$

$$\therefore (-1) \cdot (-1) = 1 \quad \square$$

Teorema. Sean $a, b \in \mathbb{R}$

- 1) si $a \neq 0$, entonces $a^{-1} \neq 0$ y $(a^{-1})^{-1} = a$;

2) si $ab=0$, entonces $a=0$ o $b=0$.

Dem 1) Como $a \neq 0$, existe $a^{-1} \in \mathbb{R}$.

Si $a^{-1} = 0$

$$\Rightarrow 1 = a \cdot a^{-1} = a \cdot 0 = 0$$

(Teorema anterior)

$$\Rightarrow 1 = 0 \quad \text{!}$$

($1 \neq 0$)

$$\therefore a^{-1} \neq 0$$

Ya que $a^{-1} \neq 0$, existe $(a^{-1})^{-1} \in \mathbb{R}$ inverso multiplicativo de a^{-1} . Pero $a \cdot a^{-1} = 1$, es decir, a es el inverso multiplicativo de a^{-1}

$$\therefore a = (a^{-1})^{-1} \quad \text{(unicidad del inv.)}$$

Definición. Sean $a, b \in \mathbb{R}$.

~ Definimos la resta o sustracción de a menos b como

$$a - b := a + (-b).$$

~ Si $b \neq 0$, definimos la división o el cociente de a entre b como

$$\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}.$$

~ Fijamos $a^1 = a$, y para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos la exponenciación o potencia de a a la $n+1$ como

$$a^{n+1} := (a^n) \cdot a.$$

Ejercicio. Resuelve las ecuaciones siguientes y justifica cada paso haciendo referencia a una propiedad o teorema pertinente:

1) $2x + 5 = 8$;

2) $2x + 6 = 3x + 2$;

3) $x^2 = 2x$;

4) $(x+1)(x+2)$.

Sol. 1) $2x + 5 = 8$

$$\Leftrightarrow (2x + 5) - 5 = 8 - 5$$

$$\Leftrightarrow (2x + 5) + (-5) = 8 + (-5)$$

(def. -)

$$\Leftrightarrow 2x + (5 + (-5)) = 3$$

(asocia. +)

$$\Leftrightarrow 2x + 0 = 3$$

(inverso +)

$$\Leftrightarrow 2x = 3$$

(neutro +)

$$\Leftrightarrow 2^{-1} \cdot (2 \cdot x) = 2^{-1} \cdot 3$$

($2 \neq 0 \Rightarrow \exists 2^{-1}$)

$$\Leftrightarrow (2^{-1} \cdot 2) \cdot x = 2^{-1} \cdot 3$$

(asocia. ·)

$$\Leftrightarrow 1 \cdot x = 2^{-1} \cdot 3$$

(inverso ·)

$$\Leftrightarrow x = 2^{-1} \cdot 3$$

(neutro ·)

$$\Leftrightarrow x = 3 \cdot 2^{-1}$$

(comm. ·)

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

(def. div)

Veamos que $\frac{3}{2}$ satisface la ecuación.

$$2 \left(\frac{3}{2} \right) + 5 = 2 \cdot (3 \cdot 2^{-1}) + 5$$

(def. div.)

$$= 2 \cdot (2^{-1} \cdot 3) + 5$$

(comm. ·)

$$= (2 \cdot 2^{-1}) \cdot 3 + 5$$

(asocia. ·)

$$= 1 \cdot 3 + 5$$

(inverso ·)

$$= 3 + 5$$

(neutro ·)

$$= 8.$$

$\therefore x = \frac{3}{2}$ es solución de la ecuación.

3) $x^2 = 2x$

$$\Leftrightarrow x \cdot x = 2 \cdot x$$

(def. x^2)

$$\Leftrightarrow x \cdot x + (-(2 \cdot x)) = 2 \cdot x + (-(2 \cdot x))$$

$$\Leftrightarrow x \cdot x + (-(2 \cdot x)) = 0$$

(inverso +)

$$\Leftrightarrow x \cdot x + (-1) \cdot (2 \cdot x) = 0$$

($-a = (-1) \cdot a$)

$$\Leftrightarrow x \cdot x + ((-1) \cdot 2) \cdot x = 0$$

(asocia. ·)

$$\Leftrightarrow x \cdot x + (-2) \cdot x = 0$$

($(-1) \cdot a = -a$)

$$\Leftrightarrow (x + (-2)) \cdot x = 0$$

(distribución)

$$\Rightarrow x + (-2) = 0 \quad \circ \quad x = 0$$

(Teo. anterior)

$$\text{Si } x = 0 \quad \checkmark$$

$$\text{Si } x + (-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow [x + (-2)] + 2 = 0 + 2$$

$$\Leftrightarrow x + [(-2) + 2] = 0 + 2$$

(asocia. +)

$$\Leftrightarrow x + 0 = 0 + 2$$

(inversa +)

$$\Leftrightarrow x = 2$$

(neutro +)

$$\Rightarrow x = 0 \quad \circ \quad x = 2$$

Resta ver que 0 y 2 satisfacen la ecuación.

$$\sim 2^2 = 2^1 \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 4 \quad \text{y} \quad 2 \cdot 2 = 4$$

$$\Rightarrow 2^2 = 2 \cdot 2 \quad \checkmark$$

$$\sim 0^2 = 0^1 \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0 \quad \text{y} \quad 2 \cdot 0 = 0$$

(a · 0 = 0)

$$\Rightarrow 0^2 = 0 \cdot 0$$

$\therefore$ 0 y 2 son soluciones de la ecuación 3.

2) y 4) : Tarea.

Ejercicio. Demostrar que si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces

$$-(a+b) = (-a) + (-b).$$

$$\text{Dem.} \quad -(a+b) = (-1) \cdot (a+b)$$

(Teo. anterior)

$$= (-1) \cdot a + (-1) \cdot b$$

(distrib.)

$$= (-a) + (-b)$$

(Teo. anterior)

$$\therefore -(a+b) = (-a) + (-b)$$

Otra manera de resolverlo:

$$\text{P.D. } (a+b) + [(-a) + (-b)] = 0.$$

$$(a+b) + [(-a) + (-b)]$$

$$= [(a+b) + (-a)] + (-b) \quad (\text{asocia. } +)$$

$$= [(b+a) + (-a)] + (-b) \quad (\text{comm. } +)$$

$$= [b + (a + (-a))] + (-b) \quad (\text{asocia. } +)$$

$$= [b + 0] + (-b) \quad (\text{inverso } +)$$

$$= b + (-b) \quad (\text{neutro } +)$$

$$= 0 \quad (\text{inverso } +)$$

$\Rightarrow (-a) + (-b)$ es inverso aditivo de $a+b$

$$\therefore (-a) + (-b) = -(a+b)_{\mathbb{R}}$$