

Los números reales

miércoles, 29 de septiembre de 2021

Axiomas
-
-
-
-
-

- Teorema
- Proposición
- Lema
- Corolario

} Se demuestran
a partir de axiomas
y de resultado demostrados
previamente.

Propiedades algebraicas de $\mathbb{R}$

Axiomas de campo

En el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales hay dos operaciones binarias, denotadas por $+$ y $\cdot$, que se denominan adición y producto, respectivamente.

Estas operaciones satisfacen las siguientes propiedades:

(A1) $a + b = b + a$ para toda $a, b \in \mathbb{R}$ (conmutatividad de $+$)

(A2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ para toda $a, b, c \in \mathbb{R}$ (asociatividad de $+$)

(A3) existe un elemento $0 \in \mathbb{R}$ tal que $0 + a = a$ y $a + 0 = a$
para toda $a \in \mathbb{R}$ (neutro aditivo)
se podrá demostrar a partir de (A1)

(A4) para cada $a \in \mathbb{R}$ existe un elemento $-a \in \mathbb{R}$ tal que
 $a + (-a) = 0$ y $(-a) + a = 0$ (inverso aditivo) *Notación*

(P1) $a \cdot b = b \cdot a$ para toda $a, b \in \mathbb{R}$ (conmutatividad de $\cdot$)

(P2) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ para toda $a, b, c \in \mathbb{R}$ (asociatividad de $\cdot$)

(P3) existe un elemento $1 \in \mathbb{R}$, diferente de 0, tal que $1 \cdot a = a$
y $a \cdot 1 = a$ para toda $a \in \mathbb{R}$ (neutro multiplicativo)

(P4) para toda $a \neq 0$ en $\mathbb{R}$ existe un elemento $a^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que
 $a \cdot a^{-1} = 1$ y $a^{-1} \cdot a = 1$ (inverso multiplicativo) *Notación* $a^{-1} =$ inverso multiplicativo de a

(D) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ y $(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$
para toda $a, b, c \in \mathbb{R}$ (distributividad o propiedad distributiva)

Teorema (unicidad del neutro aditivo y neutro multiplicativo) El neutro aditivo es único

1) Si z y a son elementos de $\mathbb{R}$ tales que $z+a=a$, entonces $z=0$

2) Si u y $b \neq 0$ son elementos de $\mathbb{R}$ tales que $u \cdot b = b$, entonces $u=1$.

Demostración.

1) Sean $z, a \in \mathbb{R}$ tales que $z+a=a$. P.D. $z=0$
 (Otra forma: supongamos que $z, a \in \mathbb{R}$ y $z+a=a$)

Como $z+a=a$, sumando $-a$ de ambos lados de la igualdad tenemos que

$$\Rightarrow (z+a) + (-a) = a + (-a)$$

$$\Rightarrow \underbrace{z + (a + (-a))}_{\text{asociatividad de } +} = \underbrace{0}_{\text{inverso aditivo}}$$

$$\Rightarrow z + 0 = 0 \quad (\text{inverso } +)$$

$$\Rightarrow \boxed{z = 0} \quad (\text{neutro } +)$$

2) Sean $u, b \in \mathbb{R}$ tales que $b \neq 0$ y $u \cdot b = b$. (P.D. $u=1$).

Como $b \neq 0$, sabemos que existe $b^{-1} \in \mathbb{R}$ t.q. $b \cdot (b^{-1}) = 1$ (inv. $\cdot$)

Dado que $u \cdot b = b$

$$\Rightarrow (u \cdot b) \cdot b^{-1} = b \cdot b^{-1}$$

$$\Rightarrow u \cdot (b \cdot b^{-1}) = b \cdot b^{-1} \quad (\text{asoc. } \cdot)$$

$$\Rightarrow u \cdot 1 = 1 \quad (\text{inv. } \cdot)$$

$$\Rightarrow \boxed{u = 1} \quad (\text{neutro } \cdot)$$

Teorema (unicidad de los inversos aditivos y multiplicativos)

1) Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a+b=0$, entonces $b=-a$

2) Si $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ y $a \cdot b = 1$, entonces $b=a^{-1}$.

Demostración.

1) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $a + b = 0$. (P.D. $b = -a$)

Como $a + b = 0$

$$\Rightarrow (-a) + (a + b) = (-a) + 0$$

(inv. aditivo)

$$\Rightarrow ((-a) + a) + b = -a$$

(asoc. + y neutro +)

$$\Rightarrow 0 + b = -a$$

(inv. +)

$$\Rightarrow \boxed{b = -a}$$

(neutro +)

□

2) Ejercicio

Teorema. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces:

1) la ecuación $a + x = b$ tiene solución única $x = (-a) + b$

2) si $a \neq 0$, la ecuación $a \cdot x = b$ tiene solución única $x = a^{-1} \cdot b$

Demostración.

1) Ejercicio

2) Debemos demostrar dos cosas:

i) que $x = a^{-1} \cdot b$ es solución de la ecuación, es decir, $a \cdot (a^{-1} \cdot b) = b$ y

ii) si $x \in \mathbb{R}$ cumple que $a \cdot x = b$, entonces $x = a^{-1} \cdot b$ (unicidad)

i) Como $a \neq 0$, existe $a^{-1} \in \mathbb{R}$ t.q. $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$. (inv. ·)

$$a \cdot (a^{-1} \cdot b) = (a \cdot a^{-1}) \cdot b = 1 \cdot b = b$$

↑ ↑ ↑
asoc. · inv. · neutro ·

$$\Rightarrow a \cdot (a^{-1} \cdot b) = b$$

∴ $x = a^{-1} \cdot b$ es solución de la ecuación $a \cdot x = b$

ii) Supongamos que $x \in \mathbb{R}$ cumple que $a \cdot x = b$ (P.D. $x = a^{-1} \cdot b$)

Como $a \cdot x = b$

$$\Rightarrow a^{-1} \cdot (a \cdot x) = a^{-1} \cdot b \quad (a^{-1} \text{ existe porque } a \neq 0)$$

$$\Rightarrow (a^{-1} \cdot a) \cdot x = a^{-1} \cdot b \quad (\text{asoc. } \cdot)$$

$$\Rightarrow 1 \cdot x = a^{-1} \cdot b \quad (\text{inv. } \cdot)$$

$$\Rightarrow \boxed{x = a^{-1} \cdot b} \quad (\text{neutro } \cdot)$$

~~$\frac{b}{a}$~~
 ~~$b - a$~~
No e
ha inido
la r la n
la división.

$\therefore x = a^{-1} \cdot b$ es la única solución de la ecuación $a \cdot x = b$.

Lema Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1) - Si $a + c = b + c$, entonces $a = b$ (ley de la cancelación para la suma)
- Si $c + a = c + b$, entonces $a = b$

2) - Si $a \cdot c = b \cdot c$ y $c \neq 0$, entonces $a = b$ (ley de la cancelación para el producto).
- Si $c \cdot a = c \cdot b$ y $c \neq 0$, entonces $a = b$

Demostración.

1) Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $a + c = b + c$ (P.D. $a = b$)

$$a + c = b + c$$

$$\Rightarrow (a + c) + (-c) = (b + c) + (-c) \quad (\text{inv. } +)$$

$$\Rightarrow a + (c + (-c)) = b + (c + (-c)) \quad (\text{asoc. } +)$$

$$\Rightarrow a + 0 = b + 0$$

$$\boxed{a = b}$$

$$(\text{inv. } +) \rightarrow c + (-c) = 0$$

$$(\text{neutro } +) \rightarrow a + 0 = a \\ b + 0 = b$$

$$\therefore a + c = b + c \Rightarrow a = b \quad (*)$$

Supongamos ahora que $c + a = c + b$ (P.D. $a = b$)

$$\Rightarrow a + c = b + c \quad (\text{conmut. } +)$$

$$\Rightarrow a = b \quad (\text{usando } *)$$

$$\therefore c + a = c + b \Rightarrow a = b.$$

2) Ejercicio

Teorema. Si $a \in \mathbb{R}$, entonces:

1) $a \cdot 0 = 0$

2) $(-1) \cdot a = -a$ ← el inverso aditivo de 1 multiplicado por a es igual al inverso aditivo de a .

3) $-(-a) = a$ ←

4) $(-1) \cdot (-1) = 1$

El inverso aditivo del inverso aditivo de a es igual a a .

$a \cdot 0 = \overset{?}{\dots} = 0$

Demostración

1) $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0)$ (neutro +)

$a \cdot 0 = (a \cdot 0) + (a \cdot 0)$ (distributividad)

$(a \cdot 0) + 0 = (a \cdot 0) + (a \cdot 0)$ (neutro +)

$0 = a \cdot 0$

(cancelación +) → Lema anterior

$\therefore a \cdot 0 = 0$