

Negación de proposiciones

martes, 28 de septiembre de 2021

Ejercicio. Simboliza los siguientes enunciados, luego niegue las proposiciones de manera que cada símbolo de negación afecte a lo más a una letra proposicional. Después traduzca la negación al español.

1. Las autos son lentos pero seguros.

P : Las autos son lentos

Q : Las autos son seguros

$$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$$

~ Simbolización: $P \wedge Q$

~ Negación: $\neg [P \wedge Q]$

$$\equiv \neg P \vee \neg Q$$

~ Las autos no son lentos o las autos no son seguros.

2. Mañana iré al mercado si no llueve

P : Mañana iré al mercado

Q : Mañana llueve

$$\neg(P \rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$$

~ Simbolización: $\neg Q \rightarrow P$

~ Negación: $\neg (\neg Q \rightarrow P)$

$$\equiv \neg Q \wedge \neg P$$

~ Mañana no llueve y no iré al mercado.

3. Es lo mismo que mañana salga temprano de la casa a que tome un taxi.

P : Mañana salga temprano de la casa.

Q : Mañana tome un taxi.

$$P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

~ Simbolización: $P \leftrightarrow Q$

~ Negación: $\neg [P \leftrightarrow Q]$

$$\equiv \neg [(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)]$$

$$\equiv \neg (P \rightarrow Q) \vee \neg (Q \rightarrow P)$$

$$\equiv (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P)$$

~ Mañana salgo temprano de la casa y no tomaré un taxi, o bien tomo un taxi y no salgo temprano de la casa.

4. Si María es feliz, José es infeliz, y si María no es feliz, José tampoco lo es.

P: María es feliz.

Q: José es feliz

$$\neg(\neg P) \equiv P$$

~ Simbolización: $(P \rightarrow \neg Q) \wedge (\neg P \rightarrow \neg Q)$

~ Negación: $\neg[(P \rightarrow \neg Q) \wedge (\neg P \rightarrow \neg Q)]$
 $\equiv \neg(P \rightarrow \neg Q) \vee \neg(\neg P \rightarrow \neg Q)$
 $\equiv (P \wedge \neg \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg \neg Q)$
 $\equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q)$
 $\equiv (P \vee \neg P) \wedge Q$

~ María es feliz y José es feliz, o María no es feliz y José es feliz.

~ María es feliz o no es feliz y José es feliz.

5. Puedes ir a la fiesta, pero trapeas o lavas el auto.

P: Ir a la fiesta.

Q: Trapear la casa.

R: Lavar el auto.

$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

$$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

~ Simbolización: $P \wedge (Q \vee R)$

~ Negación: $\neg[P \wedge (Q \vee R)]$
 $\equiv \neg P \vee \neg(Q \vee R)$
 $\equiv \neg P \vee (\neg Q \wedge \neg R)$

Otra manera: $\neg[P \wedge (Q \vee R)]$

$$\equiv \neg[(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)]$$

$$\equiv \neg(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge R)$$

$$\equiv (\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee \neg R)$$

$$\equiv \neg P \vee (\neg Q \wedge \neg R)$$

← Aquí comenzamos desarrollando lo que está dentro del corchete.

$$\begin{aligned} &= (\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee \neg R) \\ &\equiv \neg P \vee (\neg Q \wedge \neg R) \end{aligned}$$

~ No irás a la fiesta, o bien no trapeas la casa y no lavas el auto.

G. Hay personas que estudian y trabajan pero no tienen tiempo libre.

$A = \{x \mid x \text{ es persona}\}$

$P(x)$: x estudia

$Q(x)$: x trabaja

$R(x)$: x tiene tiempo libre

$$\begin{aligned} \neg \exists &\equiv \forall \\ \neg \forall &\equiv \exists \end{aligned}$$

~ Simbolización: $\exists x \in A (P(x) \wedge Q(x) \wedge \neg R(x))$

~ Negación:

$$\begin{aligned} &\neg [\exists x \in A (P(x) \wedge Q(x) \wedge \neg R(x))] \\ &\equiv \neg \exists x \in A \neg (P(x) \wedge Q(x) \wedge \neg R(x)) \\ &\equiv \forall x \in A \neg (P(x) \wedge Q(x) \wedge \neg R(x)) \\ &\equiv \forall x \in A (\neg P(x) \vee \neg Q(x) \vee \neg \neg R(x)) \\ &\equiv \forall x \in A (\neg P(x) \vee \neg Q(x) \vee R(x)) \end{aligned}$$

~ Todas las personas no estudian o no trabajan o tienen tiempo libre.

$$\neg [\exists x \in A (P(x))] \equiv \forall x \in A (\neg P(x))$$

Negar que "existe x que cumple algo" equivale a mostrar que "todas las x no lo cumplen"

$$\neg [\forall x \in A (P(x))] \equiv \exists x \in A (\neg P(x))$$

Negar que "todo x cumple algo" equivale a probar que "existe un x que no lo cumple".

7. Para cada número real distinto de 0 existe un número real distinto del 0 tal que el producto de estas dos es 1.

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \notin \{0\}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$$

↳ $\{0\}$: conjunto unitario del $\mathbb{Q}$, conjunto que solo contiene al 0

↳ $\{0\}$: conjunto unitario del $\mathbb{Q}$, conjunto que solo contiene al 0

~ Simbolización: $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} (xy = 1)$

~ Negación:

$$\begin{aligned} & \neg [\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} (xy = 1)] \\ & \equiv \neg \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \neg \exists y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \neg (xy = 1) \\ & \equiv \exists x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \forall y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \neg (xy = 1) \\ & \equiv \exists x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \forall y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} (xy \neq 1) \end{aligned}$$

La negación solo afecta al cuantificador, no a la pertenencia ↴

~ Existe un número real distinto del 0 tal que para cualquier número real distinto de cero, el producto de estos dos es distinto de 1.

8. Para cada número positivo existe un número natural que es mayor a este.
 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

~ Simbolización: $\forall x > 0 \exists n \in \mathbb{N} (n > x)$

~ Negación:

$$\begin{aligned} & \neg [\forall x > 0 \exists n \in \mathbb{N} (n > x)] \\ & \equiv \neg \forall x > 0 \neg \exists n \in \mathbb{N} \neg (n > x) \\ & \equiv \exists x > 0 \forall n \in \mathbb{N} (n \leq x) \end{aligned}$$

~ Existe un número positivo tal que para cada número natural, el primero es mayor o igual al segundo.