

Teorema. Sean A, B y C conjuntos. Se cumple lo siguiente:

- 1) $A \cap B \subset A$; $A \cap B \subset B$.
- 2) $A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cap A = A$
- 3) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (asociatividad de $\cap$)
- 4) $A \cap B = B \cap A$ (conmutatividad)
- 5) $A \cap B = A$ si y solo si $A \subset B$.

Demostración.

1) $\checkmark\checkmark$ 2) $\checkmark\checkmark$

3) Usaremos que $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$ (*)

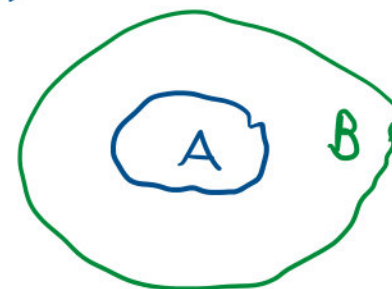
$$\begin{aligned} x \in (A \cap B) \cap C &\Leftrightarrow x \in A \cap B \wedge x \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C \\ (*) &\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cap C \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap (B \cap C) \\ &\therefore (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \end{aligned}$$

4) $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow x \in B \wedge x \in A \Leftrightarrow x \in B \cap A$
 $\therefore A \cap B = B \cap A$

5) $\Rightarrow$] Sup. que $A \cap B = A$. P.D. $A \subset B$

Sea $x \in A \Rightarrow x \in A \cap B$ ($A = A \cap B$ por hipótesis)

$$\begin{aligned} &\Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in B. \\ &\therefore A \subset B \end{aligned}$$



$\Leftarrow$] Supongamos ahora que $A \subset B$. P.D. $A \cap B = A$

$\Leftarrow$) Debido a 1), $A \cap B \subset A$.

$\Rightarrow$) Sea $x \in A$. Como $A \subset B$ y $x \in A$, entonces $x \in B$

$$\Rightarrow x \in A \cap B. \therefore A \subset A \cap B$$

$$\therefore A = A \cap B$$

Concluimos que $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$

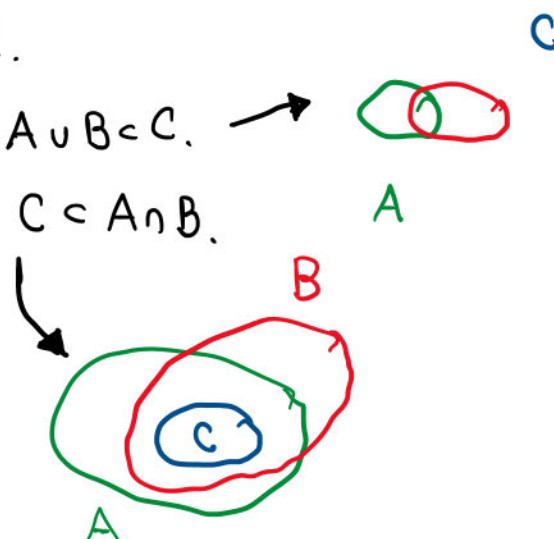
Teorema. Sean A , B y C conjuntos.

1) Si $A \subset B$, entonces $A \cup C \subset B \cup C$.

2) Si $A \subset B$, entonces $A \cap C \subset B \cap C$.

3) Si $A \subset C$ y $B \subset C$, entonces $A \cup B \subset C$.

4) Si $C \subset A$ y $C \subset B$, entonces $C \subset A \cap B$.



Demostración.

1) Supongamos que $A \subset B$.

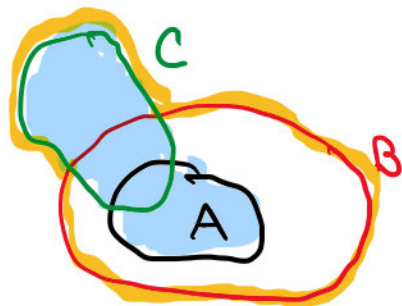
P.D. $A \cup C \subset B \cup C$

Sea $x \in A \cup C \Rightarrow x \in A \vee x \in C$

• Si $x \in A$, como $A \subset B \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \in B \cup C$

• Si $x \in C \Rightarrow x \in B \cup C$

$\therefore A \cup C \subset B \cup C$



2) Ejercicio.

3) Supongamos que $A \subset C$ y $B \subset C$.

P.D. $A \cup B \subset C$.

Sea $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \vee x \in B$.

Caso 1) Si $x \in A$, como $A \subset C$, entonces $x \in C$

Caso 2) Si $x \in B$, como $B \subset C$, entonces $x \in C$

En cualquier caso, $x \in C$.

$\therefore A \cup B \subset C$.

4) Ejercicio.

Teorema. Sean A , B y C conjuntos. Entonces

$$1) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$2) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(distributividad)

Demostración.

1) Ejercicio

$$2) x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$$

$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \cap B \vee x \in A \cap C$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\therefore A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Otra demostración (sin usar la equivalencia lógica):

$$c) \text{ Sea } x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$$

$$\bullet \text{ si } x \in B, \text{ como } x \in A \Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\bullet \text{ si } x \in C, \text{ como } x \in A \Rightarrow x \in A \cap C \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

En cualquier caso, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$\therefore A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

$$d) \text{ Sea } x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow x \in A \cap B \vee x \in A \cap C$$

$$\bullet \text{ si } x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C).$$

$$\bullet \text{ si } x \in A \cap C \Rightarrow x \in A \wedge x \in C \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$$

En cualquier caso, $x \in A \cap (B \cup C)$.

$$\therefore (A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$$

$$\therefore A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

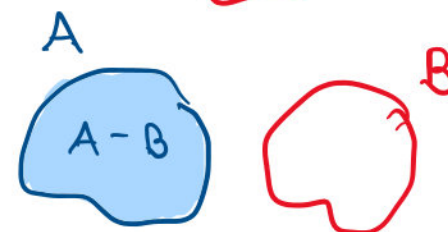
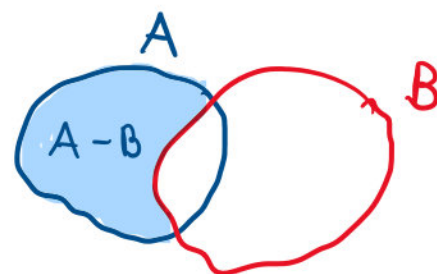
Definición. Sean A y B conjuntos. La **diferencia** de A y B es el conjunto

$$A - B = A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}.$$

A partir de la definición, tenemos que

$$x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$$

$$x \notin A - B \Leftrightarrow x \notin A \vee x \in B$$



$$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$$

$$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$$

Ejemplo:

Sean $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ y $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$.

Entonces

$$A - B = \{1, 3, 9\} \text{ y } B - A = \{4, 6, 8\}$$

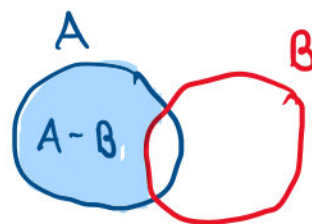
Teorema. Sean A y B conjuntos. Se cumple lo siguiente:

1) $A - A = \emptyset$; $A - \emptyset = A$

2) $A - B \subset A$

3) $(A - B) \cap B = \emptyset$

4) $A - B = A$ si y solo si $A \cap B = \emptyset$



Demostración.

1), 2) Ejercicios.

3) (Por contradicción) Supongamos que $(A - B) \cap B \neq \emptyset$. Entonces existe

$$x \in (A - B) \cap B \Rightarrow x \in A - B \wedge x \in B$$

$$\Rightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \in B$$

$$\Rightarrow x \notin B \wedge x \in B \quad \text{!}$$

$$\therefore (A - B) \cap B = \emptyset.$$

Para demostrar que $C \cap D = \emptyset$, otro método consiste en tomar un elemento en alguno de los dos conjuntos (por ejemplo, $x \in C$) y probar que no pertenece al otro conjunto ($x \notin D$).

3) (Otra prueba) P.D. $(A - B) \cap B = \emptyset$

Sea $x \in A - B$. P.D. $x \notin B$

Como $x \in A - B \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \notin B$

$\therefore (A - B) \cap B = \emptyset$

($A - B$ y B no tienen elementos en común).

4) $\Rightarrow$] Sup. que $A - B = A$

P.D. $A \cap B = \emptyset$

(Por contradicción) Supongamos que $A \cap B \neq \emptyset$. Entonces existe $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B$.

Como $x \in A$ y $A = A - B$ (por hipótesis) $\Rightarrow x \in A - B$

$\Rightarrow x \in A \wedge x \notin B$

$\Rightarrow x \in B \wedge x \notin B!$

$\therefore A \cap B = \emptyset$

$\Leftarrow$] Sup. que $A \cap B = \emptyset$.

P.D. $A - B = A$

$\Leftarrow$) Debido a 2), $A - B \subset A$

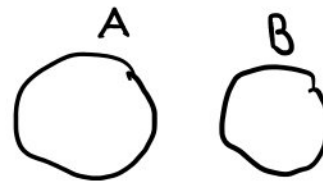
$\Rightarrow$) Sea $x \in A$. (P.D. $x \in A - B$)

Supongamos que $x \in B \Rightarrow x \in A \cap B = \emptyset \Rightarrow x \in \emptyset! \therefore x \notin B$

Como $x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in A - B$

$\therefore A \subset A - B$

$\therefore A - B = A$



Teorema. (Leyes de De Morgan) Sean A , B y C conjuntos. Entonces:

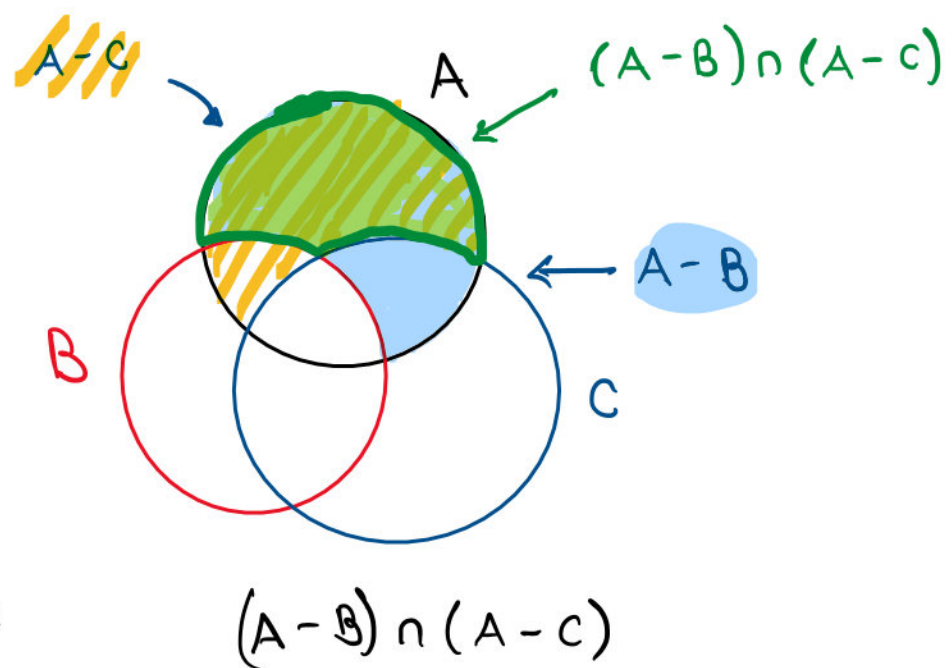
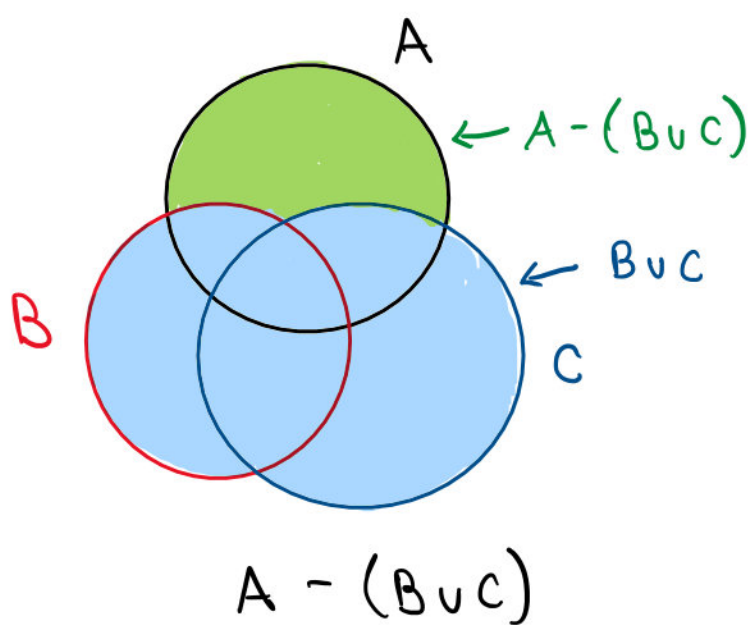
$$1) A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

$$2) A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
 1) \quad x \in A - (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \cup C \\
 &\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C) \\
 \boxed{P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge (P \wedge R)} &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C) \\
 &\Leftrightarrow x \in \underline{A - B} \quad \wedge \quad x \in \underline{A - C} \\
 &\Leftrightarrow x \in \underline{(A - B) \cap (A - C)}
 \end{aligned}$$

$$\therefore A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$



2) Ejercicio.