

Conjuntos

jueves, 23 de septiembre de 2021

Definición. Sean A y B conjuntos. Definimos la **unión** de A y B , denotada por $A \cup B$, como el conjunto

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

A partir de la definición, tenemos que

$$x \in A \cup B \stackrel{\text{def.}}{\iff} (x \in A \vee x \in B)$$

$$x \notin A \cup B \iff x \notin A \wedge x \notin B$$

$$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$$

Teorema. Sean A , B y C conjuntos. Se cumple lo siguiente:

- 1) $A \subset A \cup B$; $B \subset A \cup B$.
- 2) $A \cup \emptyset = A$; $A \cup A = A$.
- 3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. (asociatividad de la unión)
- 4) $A \cup B = B \cup A$ (conmutatividad de $\cup$)
- 5) $A \cup B = B$ si y sólo si $A \subset B$.

Demostración.

1) P.D. $A \subset A \cup B$

$$\cdot \text{ Sea } x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$$

$$\therefore A \subset A \cup B$$

$$\cdot \text{ Sea } x \in B \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in A \cup B.$$

$$\therefore B \subset A \cup B$$

2) P.D. $A \cup \emptyset = A \iff$

$$\hookrightarrow \text{ Sea } x \in A \cup \emptyset \iff x \in A \text{ o } x \in \emptyset.$$

Como $x \in \emptyset$ siempre es falso, entonces $x \in A$.

$$\therefore A \cup \emptyset = A$$

$$\hookrightarrow \text{ Por 1) sabemos que } A \subset A \cup \emptyset.$$

$$\therefore A \cup \emptyset = A$$

P.D. $A \cup A = A$

$$x \in \underline{A \cup A} \stackrel{\text{def.}}{\iff} x \in A \vee x \in A \iff x \in \underline{A}$$

$$\therefore A \cup A = A$$

3). P.D. $(A \cup B) \cup C = \underline{A \cup (B \cup C)}$

$\Rightarrow$ Sea $x \in \underline{(A \cup B) \cup C} \Rightarrow x \in A \cup B \vee x \in C.$

• Caso 1. Si $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \vee x \in B$

Subcaso 1.1) Si $x \in A \Rightarrow x \in A \cup (B \cup C)$ (por el punto 1).

Subcaso 1.2) Si $x \in B \Rightarrow x \in B \cup C \Rightarrow x \in A \cup (B \cup C)$

• Caso 2. Si $x \in C \Rightarrow x \in B \cup C \Rightarrow x \in A \cup (B \cup C)$

En cualquier caso, $x \in A \cup (B \cup C)$

$$\therefore (A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$$

$\Rightarrow$ Sea $x \in \underline{A \cup (B \cup C)}$ P.D. $x \in (A \cup B) \cup C.$

Como $x \in A \cup (B \cup C) \Rightarrow x \in A \vee x \in B \cup C$

• Caso 1. Si $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in (A \cup B) \cup C$

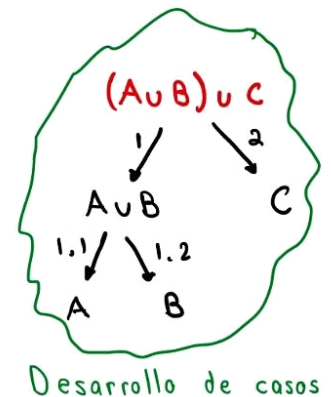
• Caso 2. Si $x \in B \cup C \Rightarrow x \in B \vee x \in C$

• Si $x \in B \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in (A \cup B) \cup C$

• Si $x \in C \Rightarrow x \in (A \cup B) \cup C$

En cualquier caso, $x \in \underline{(A \cup B) \cup C} \therefore A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$

$$\therefore (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$



* Otra Forma de demostrar $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, usando una equivalencia lógica

$$(P \vee R) \vee Q \equiv P \vee (R \vee Q) \quad (*)$$

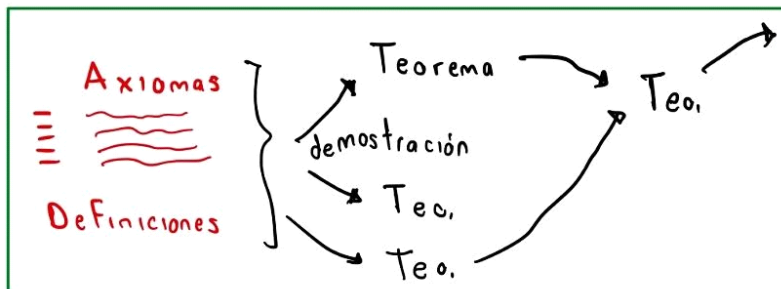
$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \cup C &\stackrel{\text{def. U}}{\iff} x \in A \cup B \vee x \in C \\ &\stackrel{\text{def. U}}{\iff} (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \\ &\stackrel{(*)}{\iff} x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) \\ &\stackrel{\text{def. U}}{\iff} x \in A \vee x \in B \cup C \\ &\stackrel{\text{def. U}}{\iff} x \in A \cup (B \cup C) \end{aligned}$$

$$\therefore (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

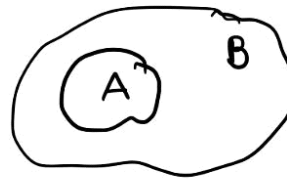
4) P.D. $A \cup B = B \cup A$ (conmutatividad de $\cup$)

$$x \in A \cup B \stackrel{\text{def. U}}{\iff} x \in A \vee x \in B \stackrel{P \vee R \equiv R \vee P}{\iff} x \in B \vee x \in A \stackrel{\text{def. U}}{\iff} x \in B \cup A$$

$$\therefore A \cup B = B \cup A$$



s) $A \cup B = B$ si y sólo si $A \subset B$.



$\Rightarrow$] Supongamos que $A \cup B = B$.

P.D. $A \subset B$

Sea $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in B$.

$\therefore A \subset B$.

$\Leftarrow$] Sup. que $A \subset B$.

P.D. $A \cup B = B$

c) P.D. $A \cup B \subset B$

Sea $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \vee x \in B$

Caso 1) Si $x \in A$, como $A \subset B \Rightarrow x \in B$

Caso 2) Si $x \in B$, $\checkmark$

En cualquier caso, $x \in B$. $\therefore A \cup B \subset B$

$\Rightarrow$) $B \subset A \cup B$ por 1)

$\therefore A \cup B = B$

Definición. Sean A y B conjuntos. Definimos la intersección de A y B , denotada por $A \cap B$, como el conjunto

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

$$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$$

A partir de la definición, tenemos que

$$x \in A \cap B \stackrel{\text{def.}}{\iff} (x \in A \wedge x \in B)$$

$$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$$

$$x \notin A \cap B \iff x \notin A \vee x \notin B$$

Teorema. Sean A, B y C conjuntos. Se cumple lo siguiente:

- 1) $A \cap B \subset A$; $A \cap B \subset B$.
- 2) $A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cap A = A$
- 3) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- 4) $A \cap B = B \cap A$
- 5) $A \cap B = A$ si y solo si $A \subset B$.

$A = \emptyset$ significa que
 A no tiene elementos

$A \neq \emptyset$ significa que A
tiene al menos un
elemento
(existe $x \in A$)

Demostración.

- 1) P.D. $A \cap B \subset A$

Sea $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A$. $\therefore A \cap B \subset A$

Similarmente, $A \cap B \subset B$ (tarea).

- 2) P.D. $A \cap \emptyset = \emptyset$ ← conjunto que no tiene elementos

(Por reducción al absurdo)

- Supongamos que $A \cap \emptyset \neq \emptyset$ (hipótesis)

Como $A \cap \emptyset \neq \emptyset$, entonces existe $x \in A \cap \emptyset \Rightarrow x \in A \wedge x \in \emptyset$!
($\emptyset$ no tiene elementos)

$\therefore A \cap \emptyset = \emptyset$.