

Tablas de verdad

miércoles, 22 de septiembre de 2021

Una proposición es una expresión o afirmación que tiene uno y solo un valor de verdad asignado: verdadero (V) o falso (F).

Las conectivas lógicas son símbolos mediante las cuales podemos construir nuevas proposiciones a partir de otras. Estas son la negación ($\neg$), la conjunción ($\wedge$), la disyunción ($\vee$), la implicación ($\rightarrow$) y la doble implicación ($\leftrightarrow$). Si P y Q son proposiciones, entonces $\neg P$, $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \rightarrow Q$ y $P \leftrightarrow Q$ también son proposiciones.

~ Negación

P	$\neg P$
V	F
F	V

~ Conjunción

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

~ Disyunción

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

~ Implicación

P	Q	$P \rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

~ Doble implicación

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Una proposición que no tiene conectivas lógicas recibe el nombre de proposición **simple**, en caso contrario la llamaremos proposición **compuesta**.

Si una proposición P está compuesta por k proposiciones simples, entonces P tiene 2^k posibles valores de verdad. Para calcular dichos valores, usamos una tabla de verdad.

- En la primera fila de la tabla colocamos todas las proposiciones que componen a P , comenzando con las simples hasta llegar a P .
- A la primera proposición de P se le asignan 2^{k-1} valores V y después

componentes n y m , comenzando con las simples hasta llegar a n .

- A la primera proposición de P se le asignan 2^{k-1} valores V y después 2^{k-1} valores F. Luego, a la siguiente proposición simple se le asignan 2^{k-2} valores V, 2^{k-2} valores F, 2^{k-2} valores V y 2^{k-2} valores F. A las demás proposiciones simples se les asignan valores de manera similar.

Ejemplo. $P \vee (\neg Q)$

P	Q	$\neg Q$	$P \vee \neg Q$
V	V	F	V
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	V

} proposiciones
 $2^2 = 4$ valores de verdad

Ejemplo. $(\neg P) \rightarrow Q$

P	Q	$\neg P$	$\neg P \rightarrow Q$
V	V	F	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	F	V	F

P	Q	$\neg P \rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	F

En esta tabla solo se colocan las proposiciones simples y la original. Los valores de las proposiciones intermedias se calculan en la última columna.

Ejemplo. $(\neg P) \wedge (Q \vee R)$

P	Q	R	$\neg P$	$Q \vee R$	$\neg P \wedge (Q \vee R)$
V	V	V	F	V	F
V	V	F	F	V	F
V	F	V	F	V	F
V	F	F	F	F	F
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	F	F

} Tres proposiciones simples, $2^3 = 8$ posibles valores de verdad.

V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	F	F

} posibles valores de verdad.

Ejemplo. $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

P	Q	R	$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	
V	V	V	V	V
V	V	F	F	F
V	F	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	V	F	F	F
F	F	V	F	V
F	F	F	F	V

Llamamos **tautologías** a las proposiciones que solo toman **valores verdaderas** en su tabla de verdad.

Ejemplo. $P \vee \neg P$

P	$P \vee \neg P$	
V	V	V
F	F	V

Ejemplo. $(P \wedge Q) \rightarrow P$

P	Q	$(P \wedge Q) \rightarrow P$	
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	F
F	F	F	F

Una proposición que solo toma **valores falsos** en su tabla de verdad recibe el nombre de **contradicción**.

Ejemplo. $P \wedge \neg P$

P	$P \wedge \neg P$	
V	V	F
F	F	V

Ejemplo. $\neg (P \rightarrow P)$

P	$\neg (P \rightarrow P)$	
V	F	V
F	F	V

Ejemplo. La negación de cualquier tautología es una contradicción.

Decimos que dos proposiciones P y Q son **lógicamente equivalentes** si $P \leftrightarrow Q$ es una tautología.

Ejemplo. $P \vee Q$ y $Q \vee P$ son lógicamente equivalentes

P	Q	$(P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$		
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	V	V	V	V
F	F	F	V	F

Ejemplo. $\neg(P \wedge Q)$ y $\neg P \vee \neg Q$ son lógicamente equivalentes

P	Q	$\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$					
V	V	F	V	V	F	F	F
V	F	V	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V	V	F
F	F	V	F	V	V	V	V

Ejemplos.

$\sim P \wedge Q$ y $Q \wedge \sim P$ son lógicamente equivalentes.

$\sim \neg(P \vee Q)$ y $\neg P \wedge \neg Q$ son lógicamente equivalentes.

Tarea.

Ejemplo. $P \leftrightarrow Q$ es lógicamente equivalente a $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

P	Q	$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow [(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)]$					
V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V	V
F	V	F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V	V	V