

Conjuntos

martes, 21 de septiembre de 2021

Consideraremos a un conjunto como una colección de objetos, donde debe quedar totalmente claro cuándo un objeto es miembro del conjunto y cuándo no lo es.

Escribiremos $x \in A$ para expresar que "x es elemento de A", "x pertenece a A" o "x está en A".

$\in$ ← símbolo de pertenencia

Usaremos $\notin$ para expresar la negación de la pertenencia, es decir, escribiremos $x \notin A$ para expresar que "x no es elemento de A", "x no pertenece a A" o "x no está en A".

Para describir un conjunto podemos hacerlo de alguna de las siguientes maneras:

- 1) Dando una lista completa de todos los elementos del conjunto, cuando esto sea posible; o dando algunos de sus elementos y usando puntos suspensivos, cuando se entiende sin ninguna duda cuáles son los demás elementos.

(por extensión)

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$B = \{10, 11, 12, 13, \dots\}$$

$$C = \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$$

$$D = \{\text{primavera, verano, otoño, invierno}\}$$

$$E = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, 38, 39, 40\}$$

- 2) Dando una propiedad (proposición) que resulte verdadera solamente para los elementos del conjunto y que sea falsa para los elementos que no pertenecen a él. (por comprensión)

$$A = \{x \mid x \text{ es un dígito}\}$$

↑ tal que / tales que

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ y } x \geq 10\}$$

$$E = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge -3 \leq x \leq 40\}$$

$$E = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 40\}$$

$$C = \{y \mid y \in \mathbb{Z} \wedge y \text{ es par}\}$$

$$D = \{x \mid x \text{ es una estación del año}\}$$

$\mathbb{N}$: conjunto de números naturales

$\mathbb{Z}$: conjunto de números enteros.

- El conjunto vacío, denotado por $\emptyset$, es el conjunto que no tiene elementos.

Definición. • Dados dos conjuntos A y B , diremos que A es subconjunto de B o que A está contenido en B si cada elemento de A también es elemento de B .

Notación: $A \subset B$

B contiene a A

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

$$B \supset A$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$$

- Escribiremos $A \not\subset B$ para indicar que A no es subconjunto de B , es decir, existe (al menos) un elemento $x \in A$ tal que $x \notin B$.

- * Para mostrar que $A \not\subset B$, basta dar un elemento $x \in A$ tal que $x \notin B$.

$$\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N} \text{ porque } -1 \in \mathbb{Z} \text{ y } -1 \notin \mathbb{N}.$$

Ejemplo:

$$\text{Sean } A = \{a, b, c, d, e\}$$

$$B = \{a, c\}$$

En este caso:

- $B \subset A$ porque todo elemento de B también es elemento de A .
- $A \not\subset B$ porque $b \in A$, pero $b \notin B$.

- Dos conjuntos A y B son iguales si tienen los mismos elementos, es decir, cada elemento de A es un elemento de B y cada elemento de B es elemento de A .

$$A = B \underset{\text{def.}}{\iff} \underbrace{(A \subset B \wedge B \subset A)}_{\text{doble contención}}$$

(definición)

- Si $A \subset B$, pero $A \neq B$, diremos que A es un subconjunto propio de B .

Notación: $A \subsetneq B$

$$A \subsetneq B \underset{\text{def.}}{\iff} (A \subset B \wedge A \neq B) \qquad \mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$$

$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

$$B = \{a, c\}$$

$$C = \{c, a\} = \{a, c\}$$

$$D = \{a, a, a, c, c\} = \{a, c\}$$

$$B \subset C$$

$$B \subset D$$

$$B \subsetneq A$$

$$A \neq B$$

$$B \subset C$$

$$B \subset D$$

$$B \not\subsetneq D$$

es falso
porque $B = D$

- * Para demostrar que $A \subset B$, debemos verificar que todo elemento de A es también un elemento de B .

"Sea $x \in A \dots \rightsquigarrow x \in B$ "

Teorema. Sean A , B y C conjuntos arbitrarios. Se cumple lo siguiente:

1) $A \subset A$

2) Si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$. (Transitividad de $\subset$)

$\Rightarrow$
implicación

3) $\emptyset \subset A$.

Demostración.

- 1) Como todo elemento de A es también elemento de A , se cumple inmediatamente que $A \subset A$.
- 2) * Para demostrar una implicación $P \Rightarrow Q$, una manera de hacerlo es suponer que el antecedente P es verdadero (hipótesis) y a partir de eso, verificar que el consecuente Q también es verdadero (demostración directa o método directo).

Supongamos que $A \subset B$ y $B \subset C$.

P.D. $A \subset C$

↑ Por demostrar.

$$\boxed{x \in A} \Rightarrow x \in B \Rightarrow \boxed{x \in C}$$

$A \subset B \qquad B \subset C$

Sea $x \in A$ (P.D. $x \in C$)

Como $A \subset B$ y $x \in A$, entonces $x \in B$. Además, como $B \subset C$ y $x \in B$, entonces $x \in C$.

∴ $A \subset C$.

↑ Por lo tanto

Demostración por contradicción o reducción al absurdo:

Suponemos lo contrario a lo que se quiere demostrar y a partir de eso llegamos "en algún momento" a una proposición Falsa (contradicción).

* Contradicción es una proposición que siempre es falsa.

3) $\emptyset \subset A$ (Por contradicción)

Supongamos que $\emptyset \not\subset A$. Entonces existe $\boxed{x \in \emptyset}$ tal que $x \notin A$, pero $x \in \emptyset$ es una contradicción, porque $\emptyset$ no tiene elementos.

∴ $\emptyset \subset A$.

Operaciones con conjuntos.

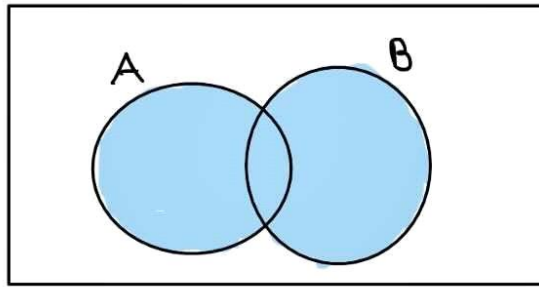
Definición. Sean A y B conjuntos.

Definimos la unión de A y B , denotada por $A \cup B$, como el conjunto

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$

A partir de la definición, tenemos que

$$x \in A \cup B \underset{\text{def.}}{\iff} (x \in A \vee x \in B)$$



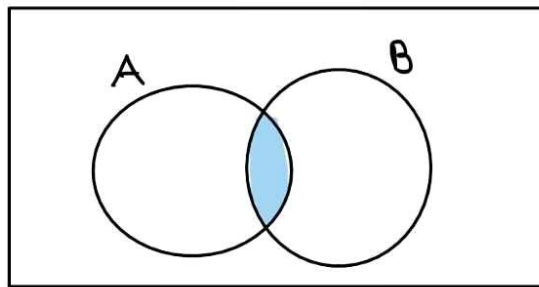
Definición. Sean A y B conjuntos.

Definimos la intersección de A y B , denotada por $A \cap B$, como el conjunto

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$

A partir de la definición, tenemos que

$$x \in A \cap B \underset{\text{def.}}{\iff} (x \in A \wedge x \in B)$$



Ejemplo:

Si $A = \{x, z, w\}$, $B = \{x, y, z\}$, y $C = \{w\}$, entonces

$$A \cup B = \{x, y, z, w\}$$

$$A \cap B = \{x, z\}.$$

$$B \cap C = \emptyset$$

Definición. Si $A \cap B = \emptyset$, es decir, A y B no tienen elementos en común, diremos que A y B son ajenos o disjuntos.